الأستاذ. بوعجاب عبد القادر

المراجعة النهائية

الريافيات

دروس ملخصة

تمارین محلولة بالتفصیل

و مواضيع بكالوريا محلولة

SAS

علوم تجريبية ـ رياضيات

تقني رياضي







1-النهايات-الاستمرارية-الاشتقاقية ودراسم الدوال الع	3 ————
معارف	3
تمارين محلولة بالتفصيل	11 —
	276.754.3
2- الدوال الأسيم واللوغاريتميم	30 —
معارف	30 ———
تمارين محلولة بالتفصيل	35 ———
3-الهندسة في الفضاء	72 ———
معارف	72
تمارين محلولة بالتفصيل	77
4 الأعداد المركبة والتحويلات النقطية	96 —
معارف	96 ———
تمارين محلولة بالتفصيل	98
	Calle State And the Called
5۔المتتالیاتالعددیۃ	118
معارف	118
تمارين محلولة بالتفصيل	121
6 الدوال الأصلية والحساب التكاملي	143
معارف	143
تمارين محلولة بالتفصيل	146
مواضيع بكالوريا محلولت	164

🛮 حساب النهايات:

$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{a}{0} = \infty (a \in R^*)$	$\frac{a}{-}=0$
$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{a} = 0 (a \in R^*)$	∞

 $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$: حالات عدم التعيين يمكن أن نتبع إحدى الطرق التالية: الاختزال أو التحليل او المرافق أوالعدد المشتق.

■ النهايات والحصر: الحصر عند نهاية منتهية:

و ا عدد حقیقی. f, h, g دوال عددیة معرفة علی المجال I و f, h, g إذا كانت: $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ و كانت $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ و كانت $g(x) \le f(x) \le h(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

: نإن x > -1 فإن برهن أنه إذا كان x > -1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1}$$
 ثم أحسب
$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$

* x > −1 و منه فإن : 0 < x +1 كما أن :

$$\frac{-1}{x+1} \le \frac{\cos x}{x+1} \le \frac{1}{x+1}$$
 و منه فإن $-1 \le \cos x \le 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0 :$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$
 فإن
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

■ المستقيمات المقاربة : (a) عدد حقيقي ثابت)

المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل: $\binom{C_f}{i}: \lim_{x\to a} f(x) = \infty :$ فإن $\binom{C_f}{i}$ فإن عادلته يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته

المستقيم المقارب الموزاي لمحور الفواصل:

: فإن $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ فإن (إذا كانت : الإذا كانت)

يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل $\left(C_{f}
ight)$

 \cdot (y = a) معادلته

(x=a)

المستقيم المقارب المائل:

وجود $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: فإنه يحتمل وجود $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: مستقيم مقارب ماثل معادلته من الشكل (y = ax + b)

y=ax+b طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته ء المنحنى المنحنى $\left(C_{f}\right)$

 $\lim_{x \to \infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$ إذا كانت:

 (C_f) فإن: المستقيم y=ax+b مقارب مائل للمنحنى

■ طريقة إيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل مباشرة من

عبارة الدالة f

f(x) = ax + b + h(x) إذا كانت: عبارة f من الشكل

 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0:$

 (C_f) فإن: y = ax + b فإن

المستقيم المقارب (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب y = ax + b الذي معادلته

f(x) - y = f(x) - (ax + b): ندرس إشارة الفرق

تمرين تطليقي

: كما يلي : -2 جمي الدالة العددية المعرفة على -2

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

- أحسب النهايات ثم أعط التفسير البياني لكل نهاية .
 - : عين الأعداد الحقيقية c, b, a بحيث يكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
 - y=x-2 : بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة . C_f مقارب مائل لـ . (C_f) .
 - (C_f) و (Δ) و أدرس الوضع النسبي بين

80/5311

* حساب النهايات مع إعطاء التفسير البياني لكل نهاية: $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 2} \right) = +\infty :$ $\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0^+ \int_{x \to -2} \lim_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0^+ \int_{x \to -2} \lim_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} \frac{1}{x^2 + 5} \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) = 9$ $\int_{x \to -2} (x^2 + 5) \int_{x \to -2} (x^2 + 5) =$

: کنا: $f(x) = +\infty$ لان

مقارب يوازي ('yy').

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

: c, b, a تعيين الأعداد الحقيقية

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$

$$= \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2}$$

$$= \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2}$$

$$egin{array}{l} a=1 \ 2a+b=0 \ 2b+c=5 \ \end{array}$$
بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 : a = 0 \end{cases}$$

$$c=9$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{9}{x+2}$$
 : و بالتالي فإن

y = x - 2 : أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة * مقارب مائل لـ : (C_f) : مقارب مائل لـ :

دينا

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 2 + \frac{9}{x + 2} - (x - 2) \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9}{x + 2} \right) = 0$$

و منه: x - 2 = x مستقيم مقارب مائل للمنحنی (C_f) .

* دراسة الوضعية النسبية للمنحنی (C_f) و (C_f) ندرس إشارة الفرق f(x) - y

$$x > -2$$
 , $f(x) - y = \frac{9}{x+2}$: if

f(x)-y>0: فإن

 (Δ) يقع فوق المستقيم و بالتالي فإن المنحنى و بالتالي فإن المنحنى و بالتالي فإن المنحنى (

🖿 الاستمرارية وتظرية القيم المتوسطة :

*دراسة استمرارية دالة /عند عدد حقيقي المن مجموعة تعريفها:

تكون f مستمرة عند a إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ملاحظة: (في بعض الدوال ندرس الاستمرارية من اليمين ومن اليسار عند القيمة a)

* دراسة الاستمرارية على يمين a :

. a نانت : $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \int_{a}^{a} f(x) dx$

* دراسة الاستمرارية على يسار a :

. aإذا كنت: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

* نظرية القيم المتوسطة:

ن طريقة إثبات أن المعادلة f(x) = k تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b] :

[a,b] مستمرة على المجال f (1

(أي متناقصة أو متزايدة) متناقصة أو متزايدة) f

. f(b) و f(a) و k (3

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة f(x) = k تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b]. ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي:

أثبت أن (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته y=k في البت أن [a;b] في المجال [a;b]

* حالة خاصة:

ن طريقة إثبات أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا في المجال [a,b] :

[a,b] مستمرة على المجال f(1)

ر تيبة على المجال [a,b] (أي متناقصة أو متزايدة).

. f(b) و f(a) عصور بين f(a)

 $f(a) \times f(b) < 0$:

إذا تحقق 1 و 2 و 3 و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة a;b[x]=0 تقبل حلا وحيدا في المجال a;b[x]=0

ملاحظة مهمة:

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي:

أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال [a,b].

كمروق الطبياتي

. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$: بالدالة f المعرفة على $f(x) = x^4 - x^2 + 1$: بين أن المعادلة f(x) = 3 تقبل حلا α في المجال f(x) = 3

الكال

ر مستمرة على المجال [1,2] لأنها دالة كثير حدود f(1)=1 و f(1)=1

و بها أن 1<3<13 أي (2) 3< أرا

f(x)=3 فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $\alpha = 3$ قبل حلا $\alpha = 3$ حيث $\alpha = 3$.

الكمولي فاطليلتي

 $g(x)=2x^3-3x^2-1$:___1;+∞[بـــ 3 -3x²-1] دالة معرفة على] و دالة معرفة على] و الدالة و

 α عصور g(x)=0 تقبل حلا وحیدا α عصور بین آن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا و جیدا α عصور بین 1,6 و 1,7 .

80/5011

1) تغيرت الدالة g:

معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ومنه قابلة للاشتقاق g

على]∞+;1-[ودالتها المشتقة:

 $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

g'(x) إشارة

قیم x	-1	0	1	+∞
g'(x) إشارة:	+		-	+
		Ĭ		

و منه : g متزايدة على كل من المجالات]∞+;1] [1;0]; $x \in [0;1]$ بمتناقصة لما

$$g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$$
 (2
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$)
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$)
 $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$)

- [1,6;1,7] g مستمرة ومتزايدة تماما على g (1
 - g(1,7) و g(1,6) عصور بين g(1,6) $g(1,6) \times g(1,7) < 0$:

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد من المجال $g(\infty) = 0$ وبها أن $g(\infty) = 0$ علما على $g(\infty) = 0$]1,6;1,7 فإن α وحيد.

تمريئ تطبيقي

بين أن المعادلة: $0 = 3 - 5x^2 - 3 = 0$ تقبل حلا في $\left[\frac{5}{2};3\right]$ lbجll

 $\left|\frac{3}{2},3\right|$ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$ دالة مستمرة على المجال $\left| \frac{5}{2}; 3 \right|$ لأنها دالة كثير حدود f(3)=6, $f(\frac{5}{2})=-3$

و بها أن $f(3) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم

 α المتوسطة فإن المعادلة $0=3-5x^2-5x^2$ تقبل حلا

 $\alpha \in \left[\frac{5}{2},3\right]$ حيث:

الإشتقاقية:

تعريف: f دالة معرفة على مجال مفتوح من مجموعة الأعداد a عند قابلة للاشتقاق عند f فإن f فإن عند الحقيقية يشمل العدد fاذا کانت : $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x}$ منتهية .

معناه:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$$
 عدد حقیقی ثابت).

. a عند العدد المشتق للدالة f عند العدد الحقيقى L $f'(a) = L : e^{-1}$

 $f(x)=3x^2-2x-1$ مثال: لتكن f الدالة المعرفة على R بـ: :a=2 عند العدد f عند العدد دراسة قابلية اشتقاق الدالة

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 - 2x - 1) - (7)}{x - 2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{3 \cdot x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

لاحظ: (0 → البسط و 0 → المقام)

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) \cdot (3x + 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$$

a=2 عند العدد f قابلة للاشتقاق عند العدد : a = 2 عند العدد المشتق للدالة f عند العدد f'(2)=10

x = a + h : ومنه x - a = h ، ومنه $h \rightarrow 0$: أي: $x - a \rightarrow 0$ أي: $x \rightarrow a$ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} : \omega$ أى لدراسة الاشتقاق عند العدد a يمكن حساب:

fوإذا كانت النتيجة منتهية نقول ال $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ قابلة للاشتقاق عند a. 6

$$f(x)=3x^2-2x-1$$
 . (نفس المثال السابق) . $a=2$ عند العدد $a=2$ عند العدد

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2+h)^2 - 2(2+h) - 1) - (7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 10h}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+10)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 10h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 10)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (3h + 10) = 10$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد a=2 والعدد المشتق للدالة f عند العدد a=2 هو :

$$f'(2)=10$$

*العدد المشتق على اليمين:

تعريف:

[a; a+h [إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل f عدد حقيقي موجب تماما .

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L :$$

حيث: (L) عدد حقيقي ثابت).

a نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليمين عند العدد الحقيقي a ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يمين العدد \star *العدد المشتق على اليسار:

تعريف:

 $\left]a-h\,;a\right]$ إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل f عدد حقيقى موجب تماما .

وكانت:
$$L$$
 عدد
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$
عدد حقیقی ثابت).

نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليسار عند العدد الحقيقي a، ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يسار العدد a.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار العدد الحقيقى a.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند

R المعرفة على f(x) = x |x| المعرفة على f(x) = x |x|

دراسة الاشتقاق عند 0:

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$$f(x) = x.(x) = x^2 \quad \text{if } x \ge 0$$

$$f(x) = x.(-x) = -x^2 \quad \text{if } x \le 0$$

الدينا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (x) = 0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0 والعدد المشتق على يمين 0 يساوى 0 .

ولدينا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 0 والعدد المشتق على يسار 0 يساوى 0 .

• بها أن العدد المشتق على اليمين يساوى العدد المشتق على اليسار فإن f قابلة للاشتقاق عند 0.

R المعرفة على f(x) = x |x-1| المعرفة على f(x) = x |x-1|

دراسة الاشتقاق عند 1:

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$$f(x) = x.(x-1) = x^2 - x$$
 | $(x-1) = x^2 - x$ | $(x-1) = x^2 - x$

$$f(x) = x \cdot (-x+1) = -x^2 + x$$
 | $(-x+1) = -x^2 + x$ | $(-x+1) = -x^2 + x$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$$
 : Let

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين f والعدد المشتق على يمين f يساوى f .

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x^2 + x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -x = -1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 1 والعدد المشتق على يسار 1 يساوى : 1 .

بها أن العدد المشتق على اليمين لا يساوى العدد المشتق على اليسار فإن f غير قابلة للاشتقاق عند f .

*الدالة المشتقة:

تعریف: f دالة معرفة علی مجال مفتوح I من R . إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقیقی X من I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق علی المجال I . وتسمی الدالة التي ترفق بكل عدد I من I العدد المشتق وتسمی الدالة المشتقة الأولی للدالة f ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

وإذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة هي f وتسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وهكذا نسمي الدوال f , f ,, f بالمشتقات المتتابعة للدالة f . f ملاحظات :

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على R.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.
- الدوال الصهاء قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.
- الدوال المثلثية من الشكل : (ax+b) المثلثية من الشكل : $x\mapsto \sin\left(ax+b\right)$ عددان حقيقيان $x\mapsto \cos\left(ax+b\right)$ ثابتان) قابلة للاشتقاق على R .

*جدول مشتقات دوال مألوفة:

f(x)	f'(x)	مجال قابلية الاشتقاق
کر کم عدد حقیقی ثابت	0]- ∞;+∞[
x	1]- ∞;+∞[
n عدد طبيعي و 2 ≥ x ⁿ	$n.x^{n-1}$]- ∞;+∞[
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$]0;+∞[أو]∞+;0[
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$]0;+∞[
$\sin x$	$\cos x$]- ∞;+∞[
$\cos x$	$-\sin x$]-∞;+∞[

*العمليات على المشتقات: (الجمع ، الجداء ، النسبة)

و V دالتان قابلتان الاشتقاق على مجال I و α عدد حقيقي ثابت .

الدالة	الدالة المشتقة
U+V	U'+V'
$U \times V$	U'.V + V'.U
$\alpha.U$	$\alpha.U'$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$
$\frac{1}{U}$	$\frac{-U'}{U^2}$

أمثلة

I عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على المجال i في كل حالة :

$$I =]0; +\infty[f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + \frac{2}{3}]$$

$$I =]0; +\infty[$$
, $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ (2)

$$I =]2; +\infty[$$
, $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$ (3)

$$I =]-\infty; 2[, f(x)=1-2x+\frac{3}{5x-10}]$$

الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x^3) - 3(2x) - 5(1) + 0 = 2x^3 - 6x - 5$$

$$]0;+\infty[$$
 الدالة f قابلة للاشتقاق على f

$$f'(x) = (2x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1)$$
$$2x\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} + x^2 - 1 \quad 5x^2 - 1$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}.2\sqrt{x} + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$

نادالة f قابلة للاشتقاق على $]\infty+;2$ ولدينا :

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 4) - 2x(2x - 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-2x^2 + 6x - 8}{(x^2 - 4)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2;\infty-[$ ولدينا:

$$f'(x) = -2 - \frac{3(5)}{(5x - 10)^2} = -2 - \frac{15}{(5x - 10)^2}$$

مشتقة دالة مركبة:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال J و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال J حيث من أجل كل عدد

حقیقی
$$x$$
 من I فإن : I فیکون من أجل کل $g(x) \in J$ فیکون من أجل کل عدد حقیقی $g(x) \times f'(g(x))$: I منال I و I مثال I و I مثال I و I مثال I و I منال I و I و I منال I و I

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا:

$$f'(x) = V'(x) \times U'(V(x)) = 2\cos(2x-3)$$

$$f(x) = (2x-3)^5 : \underline{02}$$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين $U\circ V$ حيث : $U(x)=x^5$. (R قابلة للاشتقاق على $U(x)=x^5$

$$U'(x) = 5x^4$$
 : ومنه

$$\cdot$$
 (R فابلة للاشتقاق على $V(x) = 2x - 3$

$$V'(x) = 2 : 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا:

$$f'(x) = V'(x) \times U'(V(x)) = 2 \times 5 (2x - 3)^4$$

= $10 (2x - 3)^4$

$$\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$
 (1 :تنائج (1

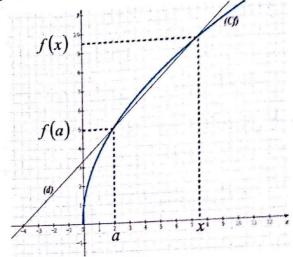
$$(U)^n = n.U'.U^{n-1}$$
 (2)

$$\left(\sin(ax+b)\right)' = a.\cos(ax+b) (3$$

$$(\cos(ax+b))' = -a.\sin(ax+b)$$
 (4

التفسير الهندسي للعدد المشتق و معادلة الماس:

. دالة معرفة على مجال I من R و $\left(C_f
ight)$ تمثيلها البياني f



. a ناتكن النقطة M_0 من M_0 ذات الفاصلة M_0 . M_0 فاتكن M_0 نقطة متغيرة من M_0 نقطة متغيرة من M_0 . M_0 نقطة متغيرة من M_0 . M_0 نقطة متغيرة من M_0 .

نشئ المستقيم M_0 الذي يشمل النقطتين M_0 و M . نحسب معامل توجيه (ميل)المستقيم M_0 باستعمال النقطتين M_0 و M_0 .

 $\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$: (d) معامل توجيه المستقيم نلاحظ أنه:

f(a) يؤول لـ f(x) يؤول لـ f(x)

 M_0 ومنه فإن : النقطة M تقترب من النقطة ومنه

ملاحظات:

lpha=f'(a): إذا كان lpha عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن lpha عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن lpha=f'(a) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة $\gamma=f'(a)$ عمادلته $\gamma=\alpha.x+\beta$ أي $\gamma=\alpha.x+\beta$ وبها أن النقطة $\gamma=\alpha.x+\beta$ تنتمي للمهاس فإن إحداثياتها تحقق معادلة المهاس ومنه $\gamma=f'(a)$ معادلة المهاس ومنه $\gamma=f'(a)$

بتعویض قیمة β فی المعادلة $y=f'(a).x+\beta$ نحصل y=f'(a)(x-a)+f(a) : علی المعادلة

- α إذا كانت $\alpha=0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $\alpha=0$ و إذا كانت $\alpha=0$ عند النقطة ذات الفاصلة α موازى لحورا لفواصل.
 - و إذا كانت:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(a)}{h} = \infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L' \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

غير قابلة للاشتقاق عند a و (C_f) يقبل نصفي مماسين f عند النقطة ذات الفاصلة a معامل توجيههما a . a اتجاه تغير دالة:

. R دالة قابلة للاشتقاق على مجال f

إذا كانت f'(x) > 0 من أجل كل x من f فإن الدالة f متزايدة تماما على f

(یمکن أن تکون f' منعدمة من أجل قیم منعزلة من 1)

إذا كانت f'(x) < 0 من أجل كل x من أ فإن الدالة f'(x) < 0 متناقصة تماما على f

(يمكن أن تكون f' منعدمة من أجل قيم منعزلة من I) • إذا كانت f'=0 من أجل كل x من I فإن الدالة f ثابتة على I.

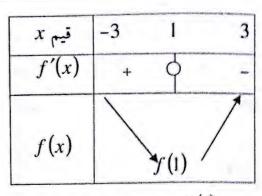
القيم الحدية المحلية:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من f'(a)=0 و g عدد حقيقي من g حيث g عدد حقيقي من g عند القيمة g من إشارتها عند القيمة g . فإن g أنيمة

نال:

قيم ١٠	-3	1	3
f'(x)	+	. 0	-
f(x)	/	f(1)	
	/		1

قيمة حدية محلية عظمى f(1)

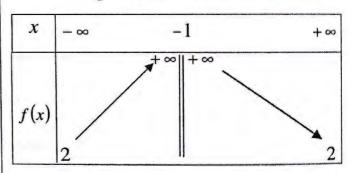


قيمة حدية محلية صغرى f(1)

تمارين

التمرين 01:

 $-\infty$; $-1[\cup]-1$; $+\infty[(C_f)]$ عددية معرفة على $-1[\cup]-1$; $+\infty[(C_f)]$ عثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كها يلي :



ا/ عين النهايات ثم فسر بيانيا كل نهاية.

أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤالٍ مما يلي مع تبرير
 الإجابة .

 (C_f) مقارب لـ y=2 مقارب لـ أ- المستقيم ذو المعادلة

ب- المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا .

 $S=]-\infty;-1[$ هي f(x)>0 هي f(x)=0. $S=]-\infty;-1[$ هي f(-2)>f(x): f(-2)>0 f(x): f(-2)>0 f(x): f(-2)=0 f(-2)=0 f(x): f(-2)=0 f(x): f(x)=0 f(x)=0

 $A(C_f)$ تنتمي إلى A(-3;1) مد- النقطة

و- الدالة f زوجية.

حل التمرين 01 :

1/ تعيين النهايات ثم التفسير البياني:

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(xx') فإن يوازي y=2 مستقيم مقارب أفقى يوازي

 $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \int_{x \to -1}^{1} f(x) = +\infty$

(yy') فإن x = -1 فإن

2/ الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير:

 (C_f) مقارب لـ y=2 مقارب لـ أ

 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$: صحیح لأن

ب/ المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا .

 $R - \{-1\}$ من أجل كل x من أجل كن f(x) > 2

 $S=]-\infty$; -1[هي f(x)>0 هي المتراجعة حلول المتراجعة

خطأ لأن مجموعة حلول المتراجحة.

 $.S' =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[: هي: f(x) > 0$

f(-2) > f(x) : يكون $-\infty$; -1[على المجال

عندما يكون x < -2. صحيح لأن الدالة f متزايدة

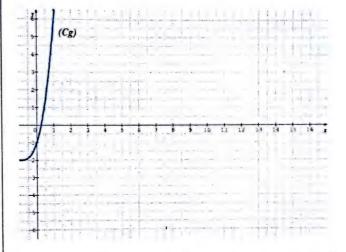
تماما على المجال]1 - ; ∞ - [.

 $A(C_f)$ تنتمى إلى A(-3;1) هـ/ النقطة

خطأ لأن القيمة الحدية الصغرى للدالة 2 و عليه فإنه f(-3) مها یکن x من D_f فإن2: 2 + f(x) أی أنx $f(1) \neq f(-1)$: و/ الدالة f زوجية. خطأ لأن

1/ المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال]∞+,1-[كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$



g(0) وحدد g أ/بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و إشارة $0,\frac{1}{2}$ علل وجود عدد حقيقي α من المجال α

 $g(\alpha) = 0$ يعقق

.] $-1,+\infty$ [على المجال g(x) على المجال

 $-1,+\infty$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال f/2 $f(x) = \frac{x^2 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$: بيا ياتي

 (o, \vec{i}, \vec{j}) مثيلها البياني في معلم متعامد (Γ) عثيلها البياني في معلم

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، من المجال $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3},]-1, +\infty[$

عین دون حساب: $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

 $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (x+1)] \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)$ و فسر النتيجتين بيانيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة ﴿ ثم أنشي (٢). $(\alpha \cong 0.26)$ (بأخذ

حل التمرين 02:

1) أ/ بقراءة بيانية تشكيل جدول تغيرات g:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -1 & & +\infty \\
g'(x) & & + & \\
\hline
g(x) & & +\infty
\end{array}$$

 $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ و g(0) = -1: $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و g(0) $0,\frac{1}{2}$ من α من وجود عدد حقیقی α من $: g(\alpha) = 0$ حيث $0,\frac{1}{2}$ لدينا g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

lpha صب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد : من $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ حيث : g(x) جا تعيين إشارة

 $x \in]-1$, $\alpha[$ من أجل g(x) < 0

 $g(\alpha)=0$ من أجل α , + ∞ من أجل α , + α 2/. أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي X من المجال

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3} :]-1, +\infty[$$

 $-1, +\infty$ لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال ، دالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

: ب
$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$
 دون حساب

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha + 1)^3} = 0$$

تفسير النتيجة : (Γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α.

ج/ حساب النهايتين:

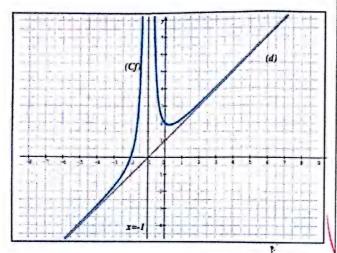
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \rightarrow 1 \\ (x+1)^2 \rightarrow 0^+ \end{cases}$$
 : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1) \right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

 $x+\infty$ عند y=x+1 معادلته y=x+1 عند د/ جدول تغيرات f:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -1 & \alpha & +\infty \\
f'(x) & - & + & \\
f(x) & +\infty & +\infty \\
f(\alpha) & & & \\
\end{array}$$

 $\alpha \cong 0.26$ $f(\alpha) \cong 1.89$ بأخذ رسم (۲):



 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1 + 5}}{x^2 + 2x + 10}$: IR IR IR IR IR $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 4}}{x - 2}$: $IR - \{2\}$ colling and $IR - \{2\}$ $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ $f(x) = 5x + \sqrt{x^2 + 1}$: الله معرفة على $f(x) = 5x + \sqrt{x^2 + 1}$: الله معرفة على الله عرفة عرفة على الله عرفة عرفة على الله عرفة على الله عرفة على الله عرفة على الله عرفة عرفة على الله عرفة على $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$ بـ IR بـ $\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad |$

حل التمرين 03:

 $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ think of } 1$ (لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل أكبر حد كعامل في البسط و المقام)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 5}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = -1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty} \int_{-\infty}^{(\text{plikl})} | -1 \rangle |$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$$
 (4
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty - \infty$$
حالة عدم تعيين من الشكل

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}\right]}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}}}{x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + 5}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x}}\right]}{x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\infty}{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - |x|\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[\frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right]}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[\frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right]}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

 $a = 0 f(x) = \frac{\sin x}{x} (3)$

$$a = \frac{\pi}{3}$$
 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x} - 2}{x - 1}$ (4)

حل التمرين 04:

h الدالة h(1) = 2 و $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$: نضع (1 h(1) = 2 و $h(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ الدالة h(1) = 0 و منه المجال h(x) = h(1) = h'(1) و عليه $h'(1) = \frac{5}{4}$ و عليه $h'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$: حيث :

$$\lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1} = h'(1) = \frac{5}{4}$$

$$h(0) = 1 \quad h(x) = \sqrt{x + 1} : 2$$

$$h(x) = \sqrt{x + 1} : 2$$

$$0 \in]-1, +\infty[\quad]-1, +\infty[\quad]$$
قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[\quad]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0) : e$$

$$h'(0) = \frac{1}{2} : e$$

$$e$$

$$e$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} : e$$

$$e$$

و نلاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = h'(0) = \frac{1}{2}$$

h الدالة h(0)=0 و $h(x)=\sin x$ (3) نضع: $h(x)=\sin x$ قابلة للاشتقاق على المجال h(x)=h(0)

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0) : 0$$

$$h'(0)=1$$
: وعليه $h'(x)=\cos x$

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)}$ $= \lim_{x \to -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$ $= \lim_{x \to -\infty} - x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - (-x) \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$ $= \lim_{x \to -\infty} x \left[-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x + \frac{4}{x^2}} \right]$

رحالة عدم تعيين من الشكل 0×∞−) ملاحظة :

(طريقة العامل المشترك لا تنفعنا في هذا المثال ، نستعمل طريقة المرافق)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - \sqrt{x^2 + 4}^2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 4\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4}} = 0$$

التمرين 04:

باستعمال قابلية الاشتقاق أحسب نهايات الدوال التالية عندما ينتهى المتغير x إلى العدد الحقيقى a

$$a=1$$
 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2}{x - 1}$ (1)

$$a = 0 f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} (2$$

تكتب عبارة f(x) على الشكل:

عداد حقیقیة ثابتة a,b,c حیث $f(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$

- c الحسب f'(x) بدلالة f'(x) الموو (1
- 2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f عين:

 $\cdot f$ أ- صورتي العددين 1 - و 1 بالدالة

ب- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

x ج-إشارة f(x) حسب قيم

f(x) د-عبارة الدالة

 (C_f) نأخذ فيما يلي: c = 0 ، b = -3 ، a = 2 وليكن (3)

f المنحنى المثل للدالة

 $f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$: أ-بين أن

. f'(x) ب-أدرس إشارة

ج-هل النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f? c_{-} الذي c_{-} مع المستقيم c_{-} الذي c_{-} معادلته c_{-} c_{-} c_{-} c_{-} المعادلته c_{-}

. (o, \vec{i}, \vec{j}) شم أرسم (C_{j}) في معلم متعامد متجانس

حل التمرين 05:

: f'(x) عبارة (1

. R من أجل كل x من

$$f'(x) = 0 + \frac{b(x^2 + 1) - 2x(bx + c)}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-bx^2 - 2cx + b}{(x^2 + 1)^2}$$

2) أ/ من خلال جدول التغيرات:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 :$$
و نلاحظ أن

$$h(x) = \sqrt{2 + 2\cos x} : \text{id}$$

IR الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ و $\frac{\pi}{3} \in IR$ و

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = h'\left(\frac{\pi}{3}\right) : \text{a.s.}$$

$$h'(x) = \frac{-2\sin x}{2\sqrt{2 + 2\cos x}} :$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$
: θ

و نلاحظ أن:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2 + 2\cos x} - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}$$

التمرين 05:

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على R لها جدول التغيرات التالي:

x	-∞	-1	1	+∞
f(x)	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

$$f(-1) = \frac{7}{2}$$
 $f(1) = \frac{1}{2}$

: f'(x) ب/ دراسة إشارة

إشارة f'(x) من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

قيم 🗴	- ∞	-1		1	+∞
$3x^2 - 3$ إشارة	+	þ	-	9	+
f'(x) إشارة	+	þ	-	6	+

f النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3x}{x^2} \right) = 2 :$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{3x}{x^2} \right) = 2 \quad 9$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad f(-1) = \frac{7}{2} \quad 9$$

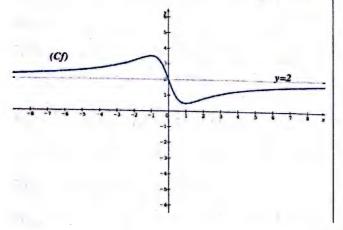
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2 \end{cases}$$
: (\Delta) د) تعيين نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (c)

$$2 - \frac{3x}{x^2 + 1} = 2$$
: معناه: $f(x) = 2$

$$x=0$$
: ومنه $\frac{3x}{x^2+1}=0$:

$$(C_f) \cap [y=2] = \{(0;2)\}$$
 : معناه

 (C_f) وإنشاء



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \int_{x \to +\infty}^{\infty} f(x) = 2 /(-1)$$

ومنه :
$$(C_f)$$
 يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$. $-\infty$

$$: f(x)$$
 جـ/ إشارة

نستنتج : f نستنتج نستنتج :

<i>x</i> قيم	-∞	+ ∞
f(x) إشارة	+	

د/ عبارة الدالة f

$$a + \frac{-b+c}{2} = \frac{7}{2}$$
 $f(-1) = \frac{7}{2}$

$$2a-b+c=7$$

$$a + \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}$$
 أي $f(1) = \frac{1}{2}$ •

$$2a+b+c=1$$
 أي

.
$$c = 0$$
 أي $b + 2c + b = 0$ أي $f'(-1) = 0$

بتعويض قيمة
$$c=0$$
 في المعادلات (1) و (2) نجد:

.
$$a = 2$$
 ومنه $4a = 8$: بالجمع نجد $\begin{cases} 2a - b = 7 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

$$a = -3$$
 نجد $a + b = 1$ نجد $a = -3$ بتعویض قیمة a

$$f(x) = 2 - \frac{3x}{x^2 + 1}$$
:

$$f(x) = 2 - \frac{3x}{x^2 + 1}$$
: الدينا / (3

$$: R$$
 من أجل كل x من أجل

$$f'(x) = 0 - \frac{3(x^2 + 1) - 2x(3x)}{x^2 + 1}$$
$$= -\frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

٧ التمرين 06:

دالة عددية معرفة على $IR - \{-1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

و يرمز بـ (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي . $(O;i;\vec{j})$. المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,i;\vec{j})$. عين الأعداد الحقيقية (c,b,a) بحيث يكون من أجل $(f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1};:IR-\{-1\})$ كل (a,b)

x+1 (2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها . (C_{n}) مند أطراف الماد ال

(3) ثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيها مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلته .

y=x-1 الذي معادلته (Δ) المنتقيم (Δ) الذي معادلته المنتقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

 $^{
m V}$ أدرس وضعية المنحنى $\left(C_f
ight)$ بالنسبة للمستقيم

f' من x من أجل كل (II)

هي الدالة المشتقة $IR - \{1\}$: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

. f للدالة

2) عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغير اتها.

(3) أكتب معادلة الماس (D) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة D.

انبت أن النقطة A(-1;-2) هي مركز تناظر A(-1;-2) المنحنى $A(C_f)$.

 $.\left(C_{f}
ight)$ و (D) و (Δ) و أرسم كلا من

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : f(x) = m حلان مختلفان .

حل التمرين 06:

(1 (1) تعيين الأعداد الحقيقية c,b,a حيث:

 $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ $= \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1}$ $= \frac{ax^2 + bx + ax + b + c}{x+1}$ $= \frac{ax^2 + (b+a)x + b + c}{x+1}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b+a = 0 ; b = -1 \\ b+c = 3 ; c = 4 \end{cases}$ $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1} : a = 0$

: f حساب النهايات على أطراف مجموعة تعريف (2

 $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = +\infty \quad \text{9}$

 $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \ (\to 4 \to 4 \to 0^+)$

 $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \text{(hund)} \to 4 \to 0^-$

(3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً موازيا

 $\lim_{x \to -1} f(x) = \infty : \text{lim} : f(x) = \infty$

و عليه فإن (C_f) يقبل مستقيها مقاربا موازيا لمحور التراتيب

x = -1 axicum

y=x-1 الذي معادلته (Δ) الذي المستقيم (4)

مستقيم مقارب ماثل:

قيم ٪	-∞	-3	-1	1	+∞
إشارة (x-1)	-	-	-	6	+
إشارة x+3	-	0 +	+		+
إشارة (x+1)²	+	+	0 +		+
f'(x) إشارة	+	o -	-	0	+

 $x \in]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$ متزایدة لما f: متزایدة لما $x \in [-3;-1[\cup]-1;+1]$ متناقصة لما

f : f تغیرات

x	-∞	-3	-1		1	+∞
f'(x)	+	o -		- () +	
		-6	+	~		+∞
f(x)	/	1	1	1		
	-∞	•	- ∞		2	

$$f(0) = 3$$
 معادلة المياس $f'(0) = -3: (D)$ و $f'(0) = -3: (D)$ ومنه $y = -3x + 3:$ ومنه $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ (III)

 (C_f) اثبات أن النقطة $(A_f) = A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى A(-1;-2) : A(-1;-2) مركز تناظر لـ A(-1;-2)

$$(2(-1)-x)\in D_f$$
 فإن $x\in D_f$ من أجل كل $x\in D_f$ فإن $x\in D_f$ المينا من أجل كل $x\in IR-\{-1\}: x\in D_f$ للدينا من أجل كل $x\neq -1:$ أي $x\neq -1:$ فإن: $1+x=1$

$$(-2-x)$$
∈ $IR - \{1\}$:

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{|x| \to +\infty} x - 1 - \frac{4}{x+1} - (x-1)$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x+1} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$-\infty$$
 و منه (Δ) بجوار (C_f) بجوار (Δ) مستقیم مقارب له (C_f) بالنسبة للمستقیم (Δ) دراسة وضعیة المنحنی (C_f) بالنسبة للمستقیم (Δ) ندرس إشارة الفرق (Δ) بالنسبة (Δ) بالنسبة (Δ) بالنسبة للمستقیم (Δ) دراسة وضعیة المنحنی (Δ) بالنسبة للمستقیم (Δ) بالنسبة للمستقیم (Δ) دراسة وضعیة المنحنی (Δ) بالنسبة للمستقیم (Δ) بالنسبة (Δ)

x قيم	- ∞	-1	+0	Ø
إشارة x+1	_	0	+	
f(x)-y إشارة			+	4
(C_f) وضعية	تحت		فوق	
بالنسبة لـ (Δ)				

:
$$IR - \{1\}$$
 إثبات أنه من أجل كل x من $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $IR-\{1\}$ و :

$$f'(x) = \frac{(2x)(x+1) - (1)(x^2 + 3)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

: f'(x) ندرس إشارة (2

لدينا:

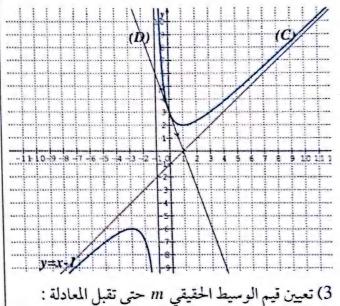
$$f(-2-x)+f(x) = \frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1} + \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$= \frac{4+4x+x^2+3}{-x-1} + \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$= \frac{-4x-4}{x+1}$$

$$= \frac{-4(x+1)}{x+1} = -4$$

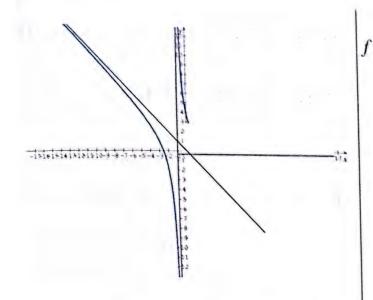
$$(C_f) \int_{0}^{\infty} A(-1;-2) \int_{0}^{\infty} A(-1;-2)$$



حلان مختلفان (بیانیا) : f(x) = m حلول المعادلة f(x) = m بیانیا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنی C_f مع المستقیم الموازي لمحور الفواصل الذي معادلته f(x) = m ومنه: تقبل المعادلة f(x) = m حلان معادلته f(x) = m . f(x) = m .

ر التعرين 07:]−

دالة معرفة على $f = -\infty; -1[U] - 1;0[-1;0]$ دالة معرفة على f = -1[U] - 1;0[-1;0] تمثيلها البياني في مستو $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كها هو مبين في الشكل .



 أ/ أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I.
 ب/ بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها.

 $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$: کیا یلی: $[0; +\infty[$ معرفة علی g(2)

و $(C_{_{g}})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس.

/ أحسب نهاية g عند ∞+.

 (Δ) يقبل مستقيماً مقاربا مائلا (C_s) بنا مائلا

عند ∞+ يطلب تعيين معادلته .

ج/ أدرس تغيرات g .

 $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$: کما یلی $R - \{-1\}$ کما دالة معرفة علی k 2

 $\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$ المناتبح:

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

ك أكتب معادلتي المهاسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي (Δ_1)

فاصلتها 0 .

. (C_k) (Δ_2) (Δ_1) (3)

مل التمرين 07 :

:معرفة على
$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$
 معرفة على ال

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(-x + \frac{4}{x+1} \right) = 4$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$$

ب) جدول تغيرات الدالة f

a قيم		-1	0
f'(x)	-	-	
f(x)	+ ∞	+∞	4

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$
 دالة معرفة على المجال $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty / 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 0$$
 و $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$: ب/ لدينا

$$\left(C_{g}\right)$$
 معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $y=x$: بجوار $x=x$

ج/ من أجل كل عدد حقيقي من المجال :]∞+;0

$$g'(x) = 1 + \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

إشارة g'(x) من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. جدول إشارة g'(x):

قيم x	0	1	+∞
x-1	-	þ	+
x+3	+		+
g'(x):إشارة	_		+

جدول تغيرات 8:

x قيم	0	1			+∞
g'(x)	-	þ		+	+∞
g(x)	4	_	3		7 ~

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$
 : كما يلي: $R - \{-1\}$ معرفة على k

$$: \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \longrightarrow / 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-3)}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - 3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} : -3$$

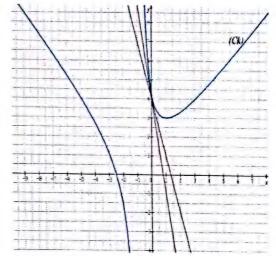
$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h + \frac{4}{h+1} - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 5h}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-5)}{h(h+1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

 $\lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \neq \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} : \text{if } h$. 0 in the limit of k in the limit of k . 0 in the limit of k in the limit of k . 0 in the limit of k in the limit of k . 0 in the limit of k in the limit of k . -5 in the limit of 0 in the limit of k in the limit of k $: (C_k) \text{ in the limit of } k \text$



التمرين 08:

: لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{3x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد . و متجانس $(o; ec{i}\,;\,ec{j})$.

0 أحسب نهايات الدالة f عند ∞ + و ∞ - و 0

ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل معادلته.

$$y = \frac{1}{3}x$$

: فإن D_f من x عال غإن (2

$$f$$
 ثم أدرس تغيرات الدالة $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$

وشكل جدول تغيراتها.

lpha بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $rac{1}{4} < lpha < rac{1}{3}$ عيث:

ه متعامد (C_f) انشئ (C_f) في مستو منسوب إلى معلم متعامد ($O; \vec{i}; \vec{j}$) و متجانس

g(x) = |f(x)| : حيث g لتكن الدالة g

أ/ أكتب عبارة g(x) بدون رمز القيمة المطلقة .

g الممثل للدالة (Cg) الممثل للدالة (Cg) باستعمال المنحنى (Cf) علل ثم أنشئ (Cg).

h(x) = f(|x|): لتكن الدالة h حيث (6

. الh دالة زوجية h

ب كيف يتم رسم المنحنى (Ch) الممثل للدالة h باستعمال المنحنى (Cf) علل ثم أنشئ (Ch).

حل التمرين 08:

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty \quad (1)$

$$\lim_{\stackrel{>}{x\to 0}} f(x) = -\infty \ _{\circ}$$

و عليه فإن (C_f) يقبل مستقيا $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

x = 0 مقاربا موازیا لمحور التراتیب معادلته

إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{1}{3}x$ مستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب ماثل :

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{3x^2} - \frac{1}{3}x = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{3x - 1}{3x^2} = 0$$

 $^{\circ \circ}$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب له (C_f) بجوار (Δ)

X	- ∞	-2	(1		+∞
f'(x)	+	þ	-	+	þ	+	
a()	7	+ ~				/	$-\frac{5}{4}$
f(x)			1		×1'	/	
			-∞				

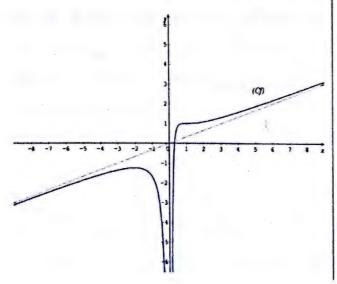
$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$
 لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $f\left(\frac{1}{4}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$

lpha حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد

$$f(\alpha) = 0$$
: حيث $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$

lpha اي يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها (C_f) $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$: حيث

: (C,) انشاء (4



f : f المنحنى f النسبة للمستقيم f : f المنحنى f النسبة للمستقيم f : يرس إشارة الفرق: y - (x) - و $f(x) - y = \frac{3x - 1}{2x^2}$

X قيم	-∞ () 1/	3 +00
إشارة 1 – 3x	ar .	- (
f(x)-y	pag.	,5000	
(Δ) بالنسبة لـ (C_{f})	تحت	نحت	فوق

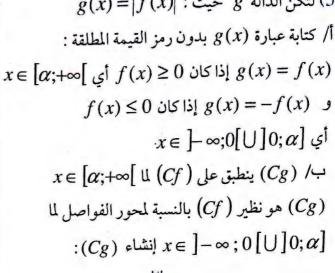
2) من أجل كل x من أجل كل (2 $f'(x) = \frac{(3x^2 + 3)(3x^2) - (6x)(x^3 + 3x - 1)}{(3x^2)^2}$ $=\frac{9x^4+9x^2-6x^4-18x^2+6x}{9x^4}$ $=\frac{3x^4-9x^2+6x}{9x^4}$ $=\frac{4x^3-3x+2}{3x^3}=\frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$

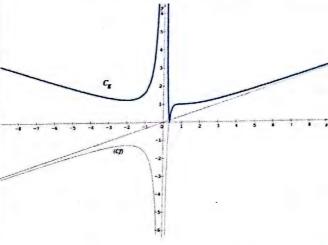
: f'(x) ندرس إشارة

X قيم	- ∞	-2	0 1	+ 00
$(x-1)^2$ إشارة	+	+	+0	*
إشارة x+2	-	0 +	And the second s	4
إشارة 3x³	-	_	0+	*
f'(x) إشارة	+	9 -	+0	*

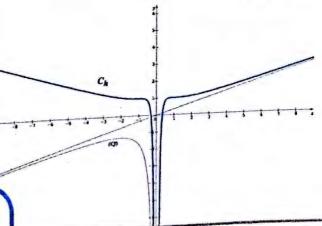
 $]-\infty;-2]$ [0;+ ∞ [متزايدة على المجالات]ر سائصة ١١ [-2;0] x ∈

g(x) = |f(x)| : حيث g لتكن الدالة g





h(x) = f(x): لتكن الدالة h حيث (6 $R-\{0\}$ من x من أجل كل x من أجل أرابات أن h دالة زوجية h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)فإن: $x \in R-\{0\}$ ور $x \in \left[0;+\infty\right[$ لا $\left(Cf\right)$ ينطبق على (Ch) بنطبق على المجاه (Ch) وبها أن h دالة زوجية فإن h(x) = f(x) لأن متناظر بالنسبة لمحور التراتيب. إنشاء (Ch):



 $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ دالة معرفة على المجال $f(x) = \frac{1}{x-1}$ إب $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

يرهن أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا ∞ ∝e]1;2[

حل التمرين 09 :

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$: دراسة التغيرات (1

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty$

f إذن:]1;+ ∞ على]0+;[إذن: 0قابلة للاشتقاق على]0+;1[

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1 \times \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

f'(x)(0:] 1;+∞ [من x من أجل كل من x من أجل

 $]1;+\infty[$ متناقصة على المجال f

جدول التغيرات:

x قيم	1 +∞
f'(x)	-
f(x)	+∞

[1;2] مستمرة على [1;2] و متناقصة تماما على [2] $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \ f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \ g$ $f(2) \times \lim_{x \to \infty} f(x) < 0 : \varphi$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد

 $f(\alpha)=0$ يعقق [1;2] من المجال

الدين 10

/ دالة معرفة على المجموعة , D ب :

$$D_{j} = \left[-\infty; -4 \right] \cup \left[0; +\infty \right] \text{ or } f(x) = x + 1 + \sqrt{x^{2} + 4x}$$

$$\lim_{i \to \infty} (C) \text{ or } f(x) = 0$$

$$\lim_{i \to \infty} (C) \text{ or } f(x) = 0$$

$$\lim_{i \to \infty} (C) \text{ or } f(x) = 0$$

1) احسب نهايات الدالة / عند ١٠٠٠ و ١٠٠٠ .

(C) بجوار ∞+ .

3) مل / قابلة للاشتقاق عند 2 9-9

$$x \in D_1 - \{0; -4\}$$
 من أجل $f'(x)$

(C) أنشئ جدول تغيرات الدالة ﴿ ثم للمنحنى (C).

حل التمرين 10:

ا) حعت من الشكل:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = -\infty + \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + 1\sqrt{x^2 + 4x} \right) \times \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2 - 4x}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x + 1}{x + 1 - |x|\sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (2x+3) \right]$$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - (x+2) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x+2)} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة 2x+3=y=2x+3 مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار ∞ +،

(3) لا يمكن له / أن تكون قابلة للاشتقاق عند (الأنها
 ليست معرفة على يسار ().

لا يمكن لـ / أن تكون قابلة للاشتقاق عند 4- لأنها ليست معرفة على يمين 4-

:
$$x \in D_f - \{0; -4\}$$
 من أجل (4)

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$$

x+2>0: لدينا]0;+∞[على المجال]0;+∞[لدينا (5) f'(x)0 إثنان f'(x)0 أي f'(x)0 أي f'(x)0 أي المجال أي الم

 $f'(x) \ge 0$ على المجال] $-\infty$, -4[لدينا: 0

$$1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}} \ge 0 \iff 1 \ge -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right)$$

$$\iff 1 \ge \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x} \iff 1 \ge \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right)^2$$

$$x \in]-\infty, -4[$$

$$\forall 0 \text{ in the descention of } x^2 + 4x \ge x^2 + 4x + 4$$

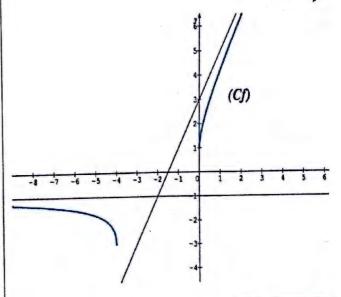
$$\iff 0 \ge 4$$

مستحیل.

f منه جدول تغیرات الداله

x قيم	-∞	-4	1	+∞
f'(x)	-	1///		+
f(x)	-1	-3	1	+∞

الإنشاء:



التمرين 11:

 $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ نسمي $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ نسمي $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ نسمي منحاها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $f(z; \vec{i}; \vec{j})$ هل الدالة $f(z; \vec{i}; \vec{j})$

- f وشكل جدول تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- 3)أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2
 - (C) أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (4)

حل التمرين 11:

1)الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن: f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 .

2) معرفة وقابلة للاشتقاق على [1:0] ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$= \frac{x^2 (3-2x)}{2x (1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$
 ومنه: $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ نان \sqrt{x} نان \sqrt{x}

x > 0 : لأن 3 - 2x إذن إشارة f'(x) على g(x) = 1 هي إشارة

$$f'(x)$$
 و $(1-x)^2$ منه جدول إشارة $(1-x)^2$ و $(1-x)^2$

قيم ٪	0	1
f'(x) إشارة	+	

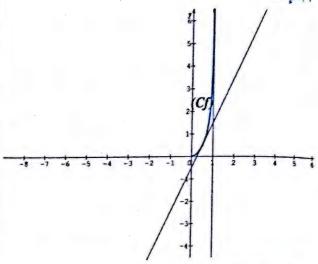
 $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty : [0;1] \text{ als } f \text{ als } f$

قيم 🗴	0 1
f'(x)	+
f(x)	+∞
	0

نكتب (3) معادلة المياس (7) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ من الشكل $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1/2}} = \frac{1}{2(1/4)}\sqrt{1} = 2$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2$$

 $y = 2x - \frac{1}{2}$: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$: (T) منه معادلة (T)



التمرين 12:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

 x^2-2x-3 $(O; \vec{i}; \vec{j})$ | Ily as a nation of a simple of $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عين D_f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج معادلات المستقيات المقاربة للمنحنى (C_f)

2) أدرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة الماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5.

 (C_f) أثبت أن المستقيم x=1 محور تناظر للمنحنى (4).

نعتبر الدالة $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ حيث (m وسيط

. f_m ونرمز لـ (C_m) إلى المنحنى الممثل للدالة

ا) أوجد D_{f_m} عجموعة تعريف الدالة (1

 $f(x) = 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3}$: $x \in D_{f_m}$ كل أجل كل أحسب النهايات للدالة f على الأطراف المفتوحة لـ D_{f_m}

 $. f_m$ أدرس تغيرات الدالة (3

(C_m) بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات (C_m). (5) ماهو المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات (4:1). (6) أنشئ (C_f).

حل التمرين 12:

: $x_2 = 3$ $x_1 = -1$ $x_2 = 3$ $x_2 = 3$ $x_3 = 3$ $x_4 = 3$ x_4

 $(x^{2}-2x-3\to 0^{+}; x^{2}-2x-15\to -12) \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ $(x^{2}-2x-3\to 0^{-}; x^{2}-2x-15\to -12) \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل x=-1

 $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

 $(x^2 - 2x - 3 \to 0^- ; x^2 - 2x - 15 \to -12)$

 $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

 $(x^2-2x-3\to 0^+; x^2-2x-15\to -12)$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته x=3

 $x \in D_f$ كل أجل كل : f'(x) عبارة (2) دراسة تغيرات (2

 $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$

 $=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3-x^2+2x+15)}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

: f'(x) إشارة

قيم ٢.		1 1	3	+∞
f'(x) إشارة	-	- 0	+	+

وعليه f متزايدة على المجالات [1;3] و $]\infty+;3$ و [1;3] و [1;3] و [1;1-[1,1]] متناقصة على المجالات [1-[1,1]] جدول تغيرات [1,1] :

قیم x		1	3	+∞
f'(x)	-	- 6	+	+
f(x)	1	+∞ 4	+ 80	<u></u>

3) معادلة الماس (∆):

$$f(5) = 0$$
 $f'(5) = \frac{2}{3}$ $y = f'(5)(x-5) + f(5)$

عند النقطة (C_f) عند النقطة $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$ ذات الفاصلة 5.

 (C_f) غور تناظر لـ x=1 عور الستقيم x=1 غور الخراط (4) . $x\in D_f$ غان $x\in D_f$ ليكن

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) - 15}{(2-x)^2 - 2(2-x) - 3} :$$

$$= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 15}{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = f(x)$$

. (C_f) عور تناظر لـ x=1 ومنه: فالمستقيم الذي معادلته

$$\Delta = m^2 + 12 > 0$$
 ، $x^2 - mx - 3 \neq 0$: معرفة إذا كان f_m (12)

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$$
 , $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2}}{2}$:

D_{f_m}	week (seet)	- co; x1	Uh	1; 12	U	$\mathfrak{r}_2;+\infty$
Jee	town .	1.1	COL	1,.,51	U.	

$$f_m(x) = 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3}$$
 (2)

$$1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = \frac{x^2 - mx - 3 - 12}{x^2 - mx - 3} = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3} = f_m(x)$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 : \text{ this limit is } f_m(x) = 1 : \text{ thi$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = -\infty$$

$$(x^2 - mx - 3 \to 0^-) : \forall Y$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$(x^2 - mx - 3 \to 0^+) : \forall Y$$

$$\lim_{x \to x_2} f_m(x) = \lim_{x \to x_2} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$(x^2 - mx - 3 \to 0^-) : \forall \forall$$

$$\lim_{x \to x_2} f_m(x) = \lim_{x \to x_2} 1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3} = +\infty$$

$$\left(x^2 - mx - 3 \to 0^+\right) : 0$$

:
$$f_m$$
 دراسة تغيرات (3

$$f_m'(x) = \left(1 - \frac{12}{x^2 - mx - 3}\right) = 12 \cdot \frac{2x - m}{\left(x^2 - mx - 3\right)^2}$$

: f'm إشارة

قیم ۲.	- ∞	$x_1 \frac{m}{2} x_2$. +∞
$f'_m(x)$ إشارة	-	- 0 +	+

$$\left[\frac{x}{2};+\infty\right]$$
 و $\left[\frac{m}{2};x_2\right]$ ترايدة على المجالات $\left[\frac{m}{2};x_2\right]$ و $\left[\frac{m}{2};x_1;\frac{m}{2}\right]$ و $\left[\frac{m}{2};x_1;\frac{m}{2}\right]$ و متناقصة على المجالات $\left[\frac{m}{2};x_1;\frac{m}{2}\right]$

6) الإنشاء:

 $: f_m$ تغيرات عدول تغيرات

x قيم		$x_1 \frac{m}{2}$	<i>x</i> ₂	+ \alpha
$f'_m(x)$	-	- 9	+	+
$f_m(x)$	1	$f_m(\frac{m}{2})$	+ ∞ 1 1	»

 (C_m) تعيين m بحيث النقطة A(4:1) تنتمى للمنحنى m

m=2 ومنه -3m=-6 ومنه -4m-8=-m-14

فالمنحنى الذي يشمل النقطة A(4:1) هو المنحنى (C_2) .

 $4 = \frac{-m-14}{-m-2}$: $4 = \frac{(1)^2 - m(1) - 15}{(1)^2 - m(1) - 3}$

4) إثبات وجود نقطة ثابتة تنتمى لكل المنحنيات (C_m) لتكن $y_0 = \frac{x_0^2 - mx_0 - 15}{x_0^2 - mx_0 - 3} \quad (C_m)$ من $M_0(x_0; y_0)$

$$y_0 x_0^2 - m y_0 x_0 - 3 y_0 = x_0^2 - m x_0 - 15$$

$$m(-y_0x_0+x_0)+y_0x_0^2-3y_0-x_0^2+15=0 \ m\in R$$
 (a)

$$\begin{cases} -y_0x_0 + x_0 = 0.....(1) \\ y_0x_0^2 - 3y_0 - x_0^2 + 15 = 0......(2) \end{cases} : \downarrow \downarrow$$

$$y_0 = 1$$
 $x_0 = 0$ $x_0 = 0$

$$y_0=1$$
 نعوض $y_0=5$: نجد (2) نجد نعوض $x_0=0$ ونعوض $x_0^2-x_0^2+12=0$ نجد: (2) نجد

$$M_0(0;5)$$
 : ومنه (حلول). ومنه

الدوال الأسية واللوغاريتمية

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = 0 \quad \frac{:}{:} \quad \text{Ilim } e^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

تيرين تطبيقي

 $f(x) = e^{2x} - e^x - IR$. Let a say f

 $\lim_{x\to\infty} f(x) + (1)$

2) تحقق ان:

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$

التعالية

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x = 0 (1)$

 $\lim_{x\to\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to\infty} e^{2x} = 0$ کن:

 $e^{2x}(1-e^{-x}) = e^{2x} - e^{2x} \cdot e^{-x} = f(x)$ (2) لدينا

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x} (1 - e^{-x}) = +\infty$!\(\text{i.i.}

 $(\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0)$: لأن

■ التزايد المقارن:

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty : بشكل عام لدينا <math display="block">\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

 $(n \in N^*)$ حيث

 $\lim_{x\to -\infty} x^n . e^x = 0$: بشكل عام لدينا $\lim_{x\to -\infty} x. e^x = 0$

حيث (n∈ N*)

e الدالة الأسية النيبرية ذات الأساسe

🛚 تعریف :

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R وتحقق

$$f(0)=1$$
 , $f'(x)=f(x)$

 $x\mapsto e^x$ تسمى الدالة الآسية ذات الأساسeونرمز لها بالرمز: e

epprox 2,718 : عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية e

🗖 خواص:

من أجل كل عددين حقيقيين xو y و n عدد صحيح كيفي:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} (2 \cdot e^{x+y}) = e^x \times e^y (1$$

$$e^0 = 1 (5 (e^x)^n = e^{n.x} (4 \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y})$$

 $e^1 = e (6$

إشارة و اتجاه تغير الدالة الآسية :

R الدالة الآسية ذات الأساس e موجبة تماما على (1

f'(x) = f(x):من أجل كل x من R من أجل كل (2)

e ومنه الدالة الآسية ذات الأساس $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$. متزايدة تماما على R

R من R من أجل كل عددين حقيقيين R و R من

x = y: يعنى $e^x = e^y$: إذا كان

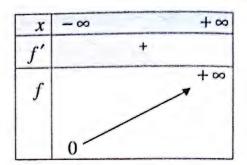
x > y: يعنى $e^x > e^y$: اذا کان

 $e^x > 1$: x > 0: $|\dot{e}| = e^x > 1$

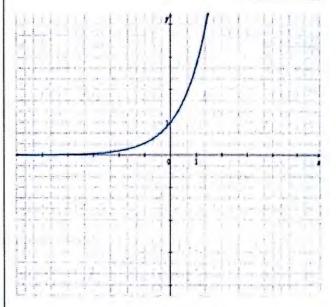
 $0 < e^x < 1$: يعنى x < 0: إذا كان

السدوال الأسية واللوغاريتمية

R المعرفة على $f(x) = e^{x}$: المعرفة على $f(x) = e^{x}$



الإنشاء البياني:



$x \mapsto e^{u(x)}$: دراسة الدالة

R إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I ومن أجل كل عدد حقيقي من I فإن :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

أمثلة :

R يا
$$f(x) = e^{x^2 - 3x + 1} \rightarrow f'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x + 1}$$
 (1)

$$R^*$$
 علی $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ (2)

مثال تطبيقي:

$$R$$
 دراسة تغيرات الدالة : $f(x) = x.e^{-x}$ على المجال $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ ذن !

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0^{+}\right) \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x}} = -\infty : 0$$

: عبارة
$$f'(x)$$
 و إشارتها

$$f'(x) = \frac{1.e^x - e^x.x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(1 - x\right)}{\left(e^x\right)^2} : x \in \mathbb{R}$$
من أجل كل

$$(e^x \succ 0$$
: لأن $1-x$: إشارة العبارة $f'(x)$ من إشارة العبارة $f'(x)$

: f تغیرات f

x قيم	- ∞	1	+∞
f'(x)	+	þ	3-21
f		$\times \frac{1}{e}$	
	0		0

عدد a شيح ($e^x=a$) : عدد المعادلات من الشكل . \blacksquare

(مستحلة)
$$a \le 0 : e^x = a$$
 (1

$$x = \ln a$$
 معناه $a > 0 : e^x = a$ (2)

تمرين تطبيقي،

حل في R المعادلات التالية:

$$e^{x-1}-1=0$$
 (2 $2e^x+6=0$ (1

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$
 (4 • $e^{x-1} - e^{2x} = 0$)(3

الدوال الأسية واللوغاريتمية

الحله

 e^x ومنه $e^x = -3$ مستحیل لأن $e^x + 6 = 0$ (1 دوما موجب وعلیه مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة خالية .

$$e^{x-1} = e^0$$
 ومنه $e^{x-1} = 1$ ومنه $e^{x-1} - 1 = 0$ (2
ومنه $x = 1$ أي $x = 1$

$$S = \{1\}$$
 وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة

$$e^{x-1} = e^{2x}$$
 eas $e^{x-1} - e^{2x} = 0$ (3)

$$-x=1$$
 ومنه $x-2x=1$ ومنه $x-1=2x$ ومنه $x=-1=2x$

.
$$S = \{-1\}$$
 وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$
 (4)

$$(e^x)^2 - 2 \times 1 \times e^x + (1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$
 : ومنه $(e^x - 1)^2 = 0$ وعليه فإن

$$x = 0$$
 : $e^x = e^0$: $e^x = 1$ ومنه $e^x = 1$

 $S = \{0\}$ وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة

$(e^{r}-2)(e^{r}+1) \ge 0$ (2) بها أنه من أجل كل عدد حقيقي:
$e^{x} + 1 > 0$ فإن: $e^{x} + 1 > 0$
فإن: $(e^x + 1) \ge 0$ فإن: $(e^x - 2)(e^x + 1) \ge 0$ هي حلول ومنه حلول المتراجحة $(e^x - 2)(e^x + 1)$
$e^x - 2 \ge 0$
$x \ge \ln 2$ ومنه $e^x \ge e^{\ln 2}$ ومنه $e^x \ge 2$
وعليه مجموعة حلول المتراجحة : إ∞+;2 ln 2 = S
$(X > 0)$ جيث $X = e^x$: بوضع $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$ (3)
$X^2 - 5.X + 6 < 0$: فإن
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6) = 1$
$X_2 = \frac{5-1}{2} = 2$ ومنه: $X_1 = \frac{5+1}{2} = 3$
$x = \ln 2$ أي $x = \ln 3$ أي $x = \ln 3$ ومنه:
$: X^2 - 5.X + 6$ جدول إشارة العبارة

-∞	2	3	+∞
+	0	- 0	+

X > 0: وبها أن

x قيم	0	2	3	+∞
$X^2 - 5.X + 6$ إشارة	+	0	- 0	+

 $e^{2x} - 5e^x + 6$: وعليه تكون إشارة العبارة

e ^x قيم	0	2	3	+∞
$e^{2x} - 5e^x + 6$ إشارة	+	0	- 0	+

ومنه:

قيم x	+ ∞	ln 2	ln 3	-∞
$e^{2x} - 5e^x + 6$ إشارة	+	0	- ϕ	+

وعليه تكون حلول المتراجحة:]S =]In 2; In 3

تمرین تطبیقی:

حل في R المتراجحات التالية:

$$e^{x-1} - e^{-2x+3} \ge 0 \quad (1$$

$$(e^x - 2)(e^x + 1) \ge 0$$
 (2)

$$e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$$
 (3)

وللحال

$$e^{x-1} \ge e^{-2x+3}$$
 eas $e^{x-1} - e^{-2x+3} \ge 0$ (1)

$$x+2x \ge 1+3$$
 ومنه $x-1 \ge -2x+3$

$$3x \ge 4$$
 $x \ge \frac{4}{3}$

$$S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right] : \text{ and if } S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$$

السدوال الأسياة واللوغاريتمية

 $a \in R^*_+ - \{1\}$ حيث a الأسية ذات الأساس $a \in R^*_+ - \{1\}$

تعريف : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

R من x من أجل كل عددين حقيقيين x و x من

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} (2 \cdot a^{x+y}) = a^x \times a^y (1$$

$$(a^x)^n = a^{n.x}$$
 (4 $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (3)

$$a^0 = 1$$
 (5

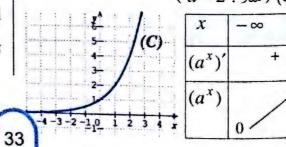
النهايات:

0 ≺ <i>a</i> ≺ 1	<i>a</i> ≻1
$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - a^x}{x}$	$\frac{1}{a} = \ln a$

$$\left(a^{x}\right)' = (\ln a) \times a^{x}$$
 : it is a limit of the state of the stat

R المعرفة على $f(x) = a^x$ المعرفة على البياني للدالة:

0-4-1:05	11 > 1 : 405
$\left(a^{x}\right) = (\ln a) \times a^{x} < 0 \left(a^{x}\right)$	$(\ln a) \times a^{x} > 0$
((a=2: (atk) (C)



 $(a = \frac{1}{2} : \lambda(C))$

\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	X	- ∞	+∞
(C)\	$(a^x)'$		
	(a^x)	+∞_	
-3-2-10 1 2 3 4 5 6x			0

e الدالة اللوغاريتمية النيبرية ذات الأساس e

: a اللوغاريتم النيبيري لعدد

 $[0;+\infty]$ من [a,b] عدد حقیقی [a,b] من [a,b] من [a,b] عدد حقیقی وحید [a,b]

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز اليه بالرمز " lna ".

 $e^b=3$ الذي يحقق الوحيد b الذي يحقق العدد الحقيقي الوحيد b الدد العدد ا

تعريف الدالة " ln ":

نسمي" الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز إليها بالرمز" \ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي xمن $]\infty+;0$ العدد الحقيقي $\ln x$.

🗖 خواص:

خاصية 1: إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$$x > y$$
 يعنى أن $\ln x > \ln y$
 $x = y$ يعنى أن $\ln x = \ln y$
 $x \prec y$ يعنى أن $\ln x < \ln y$

مثال تطبيقي:

 $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$ المعادلة: R المعادلة: $2x-3 \succ 0$ و $x+4 \succ 0$ المعادلة معرفة إذا كان: $x \leftarrow -3 \leftarrow 0$ و منه : $x \leftarrow -4$ المي المعادلة $x \leftarrow -4$ و منه : $x \leftarrow -4$ و منه : $x \leftarrow \frac{3}{2}$ و منه : $x \rightarrow -4$

السدوال الأسيسة واللوغاريتمية

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
 : فإن : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ا فإن : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ا فإن : (1

ومنه الدالة اللوغاريثمية النيبيرية متزايدة تماما على] ١٥:+٥٠

$$u$$
 دالة قابلة للاشتقاق على مجال u و لا تنعدم على هذا u

$$\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
 المجال لكل عدد x من I لدينا

= جدول تغيرات الدالة" In x "!

x	0	+00
ln'(x)	+	
		+00
$\ln x$		

* الدالة اللوغاريتمية النيبرية ذات الأساس *

 $a \neq 1$ و $a \succ 0$ و $a \neq 1$

$$x\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$
 الدالة $x\mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها بالرمز 10ga

$$\log_a:]0; +\infty[\to R$$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$
: و لدينا

ملاحظة: لدينا:]∞+;0 [ا : ∀x

$$\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e.

ا- لكل xو y من $]0;+\infty[$ و لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

 $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$x \in \left] -4; +\infty \right[\cap \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[: \infty \right]$$

$$ln(2x-3) = ln(x+4)$$
 : ولدينا

$$2x-3=x+4$$

$$S = \{7\}$$
: ومنه $x = 7 \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[: j \right]$

$$\ln(x-1) > \ln(x)$$
 عل في R المتراجعة (2

$$x \succ 0$$
 و $x \succ 1$ تكون المتراجحة معرفة إذا كان

$$x-1 \succ x$$
 لدينا $\ln(x-1) \succ \ln(x)$ يعني أن $1 \rightarrow 2$ يعني أن $1 \rightarrow 2$ يعني أن $1 \rightarrow 2$

$$\left[\frac{1}{2};+\infty\right]$$
 و لدينا تقاطع المجالين $]\infty+;1$ و لدينا

ا خان
$$x$$
 و y عددان حقیقیان موجبان تماما .

$$\ln (x \times y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln (x^r) = r \ln x \qquad r \in Q$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad :$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \lim_{x \to 0} x \ln x = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \int_{x \to 0^{+}}^{1} x^{n} \ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

السدوال الأسية واللوغاريتمية

2-لكل r∈ Q ولكل]∞+;0[ع. لدينا:

$$\log_a(x') = r \log_a(x)$$

: log قالدالة 3

$$D_{\log} =]0; +\infty[$$
 مي الدالة يا الدالة الدا

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty :$$
 יוָט : $a \succ 1$ יוָט : $a \succ 1$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a(x) = +\infty$$

 $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty : فإن : 0 < a < 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

∀x ∈]0;+∞[: لدينا:]0;+∞[: ∀x∈

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

الجال الجال الدينا المجال متزايدة تماما على المجال الحال $a \succ 1$

x	0	+ 00
$\log_a(x)$	+	A Partie of the Control of the Contr
		+00
$\log_a(x)$		
Sa (")		

ب- حالة 0<a<1 : لدينا الog متناقصة تماما على المجال]0;+∞[

x	0+∞
$\log_a(x)$	-
	+∞
$\log_a(x)$	•

🛚 دالة اللوغاريتم العشري:

ا/ تعریف:

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و نرمز لها بالرمز log (عوض log10) ، و

$$\log:]0; +\infty[\to R$$

$$x \mapsto \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$
: لدينا

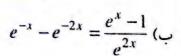
2/ ملاحظة:

$$\log 1 = 0 \cdot \log 10 = 1 - 1$$

$$\forall r \in Q$$
 , $\log(10^r) = r \log 10 - \omega$

$$\forall (x; y) \in (]0; +\infty[]^2, x = y$$
 اینی $\log x = \log y$

تمارين



$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
(>35)



1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x. مايلي:

$$(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$
 (1)

السنول الأسيدة واللوغاديتميدة

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-2 ; 1+b=-2 ; b=-3 \end{cases}$$

$$\frac{e^{x}-2}{e^{x}+1} = 1 - \frac{3}{e^{x}+1} = 0$$

$$\vdots b \cdot a : b$$

$$= \frac{e^{2x} - 3e^{x} + 5}{e^{x} + 2}$$

$$\begin{cases} (2+a) = -3; a = -5 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

$$b = 15 : b = 10 + b = 5$$

$$e^{2x} - 3e^{x} + 5$$

$$e^{2x} + 3e^{x} + 5$$

$$e^{2x} + 2e^{x} + 3e^{x} + 6$$

$$e^{2x} + 2e^{x} + 6$$

$$\frac{e^{2x} - 3e^x + 5}{e^x + 2} = e^x - 5 + \frac{15}{e^x + 2} : = 0$$

انبر بن 02

تعتبر كثير الحدود P(x) للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ $P(x) = (2x^2 + 2x^2 + 2x$

 $2e^{3x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$

 $\frac{e^{2}-2}{e^{2}-1} = \frac{1}{e^{2}-1}$ $\frac{e^{2}-2}{e^{2}-1} = \frac{1}{e^{2}-1}$ $\frac{e^{2}-3e^{2}+5}{e^{2}-2} = e^{2}-2-\frac{5}{e^{2}-2}$

حل لتوبيق 01:

(ex + ex) = ex + 2ex +1 = 1 = 1 1 1 1 1 1 1 $|e^{x} + e^{-x}|^{2} = e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} =$ $2e^{4-t} + e^{-2t} = e^{2t} + 2 + \frac{1}{t^2} = \frac{e^{2t} + 2e^{-t} + 1}{t^2}$ $=\frac{e^{4t}+2e^{2t}+1}{e^{2t}}$ $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$: $i = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$ $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^2 e^x} - \frac{1}{e^2}$ $=\frac{e^x}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x-1}{e^x}$ $\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} : \text{if } x \neq x$ $\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{x} - \frac{1}{e^{x}}}{e^{x} + \frac{1}{e^{x}}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{x}}}$ $=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\frac{e^{z}-2}{e^{z}+1} = a + \frac{b}{e^{z}+1} : \Rightarrow b \cdot a \Rightarrow A \cdot (2)$$

$$a + \frac{b}{e^{z}+1} = \frac{ae^{z}+a+b}{e^{z}+1} = \frac{e^{z}-2}{e^{z}+1}$$

حل التمرين 02

$$e^{i-1} - 1 = 0 / 1$$

$$e^{i-1} - e^{2i} = 0 / 2$$

$$e^{2i} + e^{i-2i} - (e+1) = 0 / 2$$

$$e^{2i} + 2e^{i} + 1 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} + e^{i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/i} - 2 = 0 / 3$$

$$e^{2i/$$

حل التعرين 03:

 $e^{r-1} = e^0$ cas $e^{r-1} = 1$ cas $e^{r-1} - 1 = 0$ / (1) وت x=1 أي x=1 و وعليه مجموعة حلول للعادلة هي المجموعة $S = \{1\} = S$. x-1=2x $e^{x-1}=e^{2x}$ $e^{x-1}-e^{2x}=0$ x = -1 ci - x = 1 ci - x = 1وعليه مجموعة حلول العابلة هي المجموعة [-] = S . $e^{2x} + e^{1-2x} - (e+1) = 0$ $e^{2x} + e \times e^{-2x} - (e+1) = 0$ $e^{2x} + e \times \frac{1}{e^{2x}} - (e+1) = 0$ $e^{2x} \neq 0$ ile $\frac{e^{4x} + e - ee^{2x} - e^{2x}}{e^{2x}} = 0$

: المادلات الثالية: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

$$P(2)$$
: صاب ()
$$P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$$
 a,b,c : نعين الأعداد الحقيقية

$$P(x) = (x-2)(ax^{2} + bx + c)$$

$$= ax^{3} + bx^{2} + cx - 2ax^{2} - 2bx - 2c$$

$$= ax^{3} + (b-2a)x^{2} + (c-2b)x - 2c.$$

$$a=2$$
 $b-2a=-5:b-4=-5:b=-1.$
 $c-2b=1:c+2=1:c=-1.$
 $-2c=2:c=-1.$

$$P(x) = (x-2)(2x^2-x-1)$$
:

:
$$P(x) = 0$$
 خلول المعادلة (2

$$(x-2)(2x^2-x-1)=0$$
 معناه:

•
$$2x^2 - x - 1 = 0$$
 • $x - 2 = 0$:

$$S = \left\{ \frac{1-2}{2} - \frac{1}{2} \right\} : x = 1$$
 $x = -\frac{1}{2}x = 2$

$$2e^{2x} - 5e^{2x} + e^x + 2 = 0$$
 3

$$2y^3 - 5y^2 + y + 2 = 0$$
 قان المعادلة تصبح:

$$e^x = 2; x = \ln 2 : \omega_y$$

•
$$e^x = 1; x = 0$$

•
$$e^z = -\frac{1}{2}(\text{jerm})$$

$$S = \{0; \ln 2\} : \omega_{s}$$

ومنه $x \ge \frac{4}{3}$ أي $x \ge 4$ ومنه $x \ge \frac{4}{3}$ أي $x \ge 4$ أي $x \ge \frac{4}{3}$ أو عليه مجموعة حلول المتراجحة : $S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$ أن $S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$ عققة دوما .

 $S =]-\infty;+\infty[$: وعليه مجموعة حلول المتراجحة $(e^x - 2)(e^x + 1) \ge 0$ /ج

بها أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $e^x + 1 > 0$ فإن $e^x + 1 > 0$ حلول حلول المتراجحة $e^x + 1 \geq 0$ ومنه $e^x + 1 \geq 0$

 $S = [\ln 2; +\infty[: aze] + \infty[: aze]$ وعليه مجموعة حلول المتراجعة $X = e^x$: بوضع $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$ (ابوضع $X^2 - 5.X + 6 < 0: aze]$ فإن $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6) = 1$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6) = 3$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (6) = 3$

 $x = \ln 2$ ومنه $e^x = 3$ أي $x = \ln 3$ أو $e^x = 3$ أي $x = \ln 3$ جدول إشارة العبارة $x = \ln 3$ أو $x = \ln 3$

قيم x	-∞	2		3	+∞
إشارة	+	0	_	0	+
$X^2 - 5.X + 6$					

وبها أن : 0 < X

قيم x	0	2	3	+∞
$X^2 - 5.X + 6$ إشارة	+	0	- 0	+

 $e^{2x} - 5e^x + 6$: وعليه تكون إشارة العبارة

e ميا	0	2	3	+∞	
إشارة 6 +6 e ²¹ -5e ¹	+	J -	7	+	

 $e^{4x} - (e+1)e^{2x} + e = 0$:فإن $(X > 0 - X = e^{2x})$ (بوضع: $X^2 - (e+1).X + e = 0$: فإن $\Delta = (e+1)^2 - 4 \times 1 \times e = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$ $X_1 = \frac{e+1+\sqrt{(e-1)^2}}{2} = \frac{e+1+e-1}{2} = e$ $X_2 = \frac{e+1-\sqrt{(e-1)^2}}{2} = \frac{e+1-e+1}{2} = 1$ $X=1 \rightarrow e^{2x}=1 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$: $X = e \rightarrow e^{2x} = e \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ (2) $(e^x - 1)^2 = 0$: ومنه $(e^x)^2 - 2 \times 1 \times e^x + (1)^2 = 0$ $e^x = 1$ ومنه $e^x - 1 = 0$ وعليه فإن: ومنه: $e^x = e^0$ وعليه: x = 0 وعليه مجموعة حلول $S = \{0\}$ المعادلة هي المجموعة $e^{2|x|} + e^{|x|} - 2 = 0$ (a)

 $X^2+X-2=0$: فإن X>0 حيث $X=e^{|x|}$: بوضع $X=e^{|x|}$

 $X_{1} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$ $X_{2} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad (\text{outpit}) \quad \text{o}$ $e^{|x|} = e^{0} \text{ align} e^{|x|} = 1 \text{ cist} \quad X = 1 \text{ and}$ $x = 0 \text{ cist} \quad |x| = 0 \text{ and}$ $S = \{0\} \text{ is parallel for any limit of } x = 0 \text{ for align} e^{x-1} \geq e^{-2x+3} \text{ of } e^{x-1} \geq e^{-2x+3} \text{ of } e^{x-1} \geq e^{-2x+3} \text{ of } e^{x-1} \geq -2x+3 \text{ of } e^{x-1} \leq -2x+$

السدوال الأسبرو اللبوغارستميت

(air

ينا ي	wn (V)	In 2	ln3	+00
إشارة	+	d -	· 0	+

 $S = \ln 2 : \ln 3$ [sale like] $S = \ln 2 : \ln 3$

$$(X>0)$$
 حیث $X=e^{x}$: برضع $e^{2x}+e^{x}-6<0/a$

$$X^2 + .X - 6 < 0$$
 : نان

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$$

$$X_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$
 (a (a (a (a) $X_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$$x = \ln 2$$
 رمنه : $e^x = 2$

$$: X^2 + . X - 6$$
 جدول إشارة العبارة

$$x$$
 قيم x $-\infty$ -3 x $+\infty$ x^2+x-6 اشارة x^2+x-6 x^2+x-6

X > 0:

قيم ٪	0	2	+∞
إشارة 4-X-6 إشارة	-	0	+

 $e^{2x} + e^x - 6$: وعليه تكون إشارة العبارة:

e ^x مية	0	2	+∞
$e^{2x} + e^x - 6$ إشارة	-	4	+

ومنه:

تيم x.	- 00	ln 2	+∞
اشارة e2x + e4 - 6	_	6	+

وعليه تكون حلول المتراجحة: S = }- ∞; In 2[

$$e^{x} = 1$$
: 0 : $e^{x} - 1 = 0$: 0 : $\frac{e^{x} - 1}{2 - e^{x}} > 0$

$$x = \ln 2$$
 پان: $2 - e^x = 0$ بان: $2 - e^x = 0$

In 2 e* - ا النارة - 0 اشارة °2−e $\left|\frac{e^{x}-1}{2-e^{x}}\right|$

وعليه تكون حلول المتراجحة:] 2 ln 2 [= 3

التبرين 04:

(x المعادلات الثالية: (المجهول x)

$$\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$$
 (1

 $\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$

$$\ln(x^2 + x) = 1 \ (\Rightarrow$$

$$\ln|1-x| = \ln 3 \ ($$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1 \ (\triangle$$

$$\ln(x^2-2x) = \ln(x+10)$$
 (.

التالية: x المتراجحات ذات المجهول x التالية:

$$\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$$
 (†

$$ln(2x+3) < 5$$

$$\ln x > \ln(2x-1) (=$$

$$x.\ln x - \ln x \ge 0$$
 (s

حل التعرين 04:

 $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$ (1(1)

المادلة معرفة إذا و فقط إذاكان :

x>0: 0: x>0

 $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$: $0; +\infty$ من أجل كل x من أجل كل من

3+x=3x رب $\ln(3+x)=\ln 3x$

$$x = \frac{3}{2} \text{ cm} \qquad \boxed{39}$$

(م)
$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$$
 تكون المعادلة معرفة إذا كان $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$ م) $0 < \frac{x+1}{x-1} > 0$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1 :$$
ولدينا

$$e.x + e = x - 1$$
: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{e}$: $\frac{x+1}{x-1} = e^{-1}$

$$e.x - x = -e - 1$$
:

$$x = \frac{e+1}{1-e}$$
: $e = \frac{-e-1}{e-1}$

$$S = \left\{ \frac{e+1}{1-e} \right\} : \text{ one } x = \frac{e+1}{1-e} \in]-\infty; -1[\bigcup] 1; +\infty[]$$

$$\ln(x^2 - 2x) = \ln(x+10)$$
 (9

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x^2 - 2x > 0$$
 $x + 10 > 0$:

$$x(x-2) > 0$$
 و $x \ge -10$

$$x \in]-\infty;0[\bigcup]2;+\infty[$$
 تکافئ $x \ge -10$ تکافئ

$$x \in]-10,0[\cup]2;+\infty[:]$$

$$\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
 تکافئ $x^2 - 2x = x + 10$ تکافئ

$$x = -2$$
 او $x = 5$

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$$
 (ب
المعادلة معرفة إذا وفقط إذاكان:

$$x > 2$$
: $0 < x + 10 > 0$ $0 < x > 0$

$$:]2;+\infty[$$
 من أجل كل x من أجل ك

$$\ln x + \ln(x - 2) = \ln(x + 10)$$

$$\ln(x(x-2)) = \ln(x+10)$$

$$x(x-2) = x+10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x=-2$$
 أو $x=5$

$$(-2 \notin]2;+\infty[:]$$
 (لأن $x=5$

$$\ln(x^2 + x) = 1 \ (\Rightarrow$$

$$x^2 + x \succ 0$$
: تكون المعادلة معرفة إذا كان

$$x \in]-\infty;-1[\bigcup]0;+\infty[$$
 ومنه :

$$x^2 + x = e$$
 ولدينا : $\ln(x^2 + x) = 1$ أي

$$x^2 + x - e = 0$$
: i

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-e) = 1 + 4e$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \in] - \infty; -1[\bigcup]0; +\infty[:]$$
 ومنه

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2} \right\} : equal 5$$

$$\ln|1-x| = \ln 3$$

$$x \neq 1$$
 ومنه: $1-x \neq 0$ ومنه: $1 \neq x \neq 1$

$$x \in R - \{1\} : \emptyset$$

$$|1-x|=3$$
 ولدينا: $\ln |1-x|=\ln 3$ اي

$$1-x=-3$$
 | $1-x=3$:

$$S = \{-2,4\}$$
:

نبم x	0	1	+∞
إشارة 1−x	_	þ	+
إشارة In x	_	0	+
إشارة x-1)ln x)	+	0	+

 $S =]0; +\infty[$: $0; +\infty[$: $0; +\infty[$

النمرين 05

 $4(\ln x)^2 - 1 = 0$ / أن المعادلات التالية : أ $(1 + 4(\ln |x|)^2 - 1 = 0)$ / ب $(2 + 4(\ln |x|)^2 - 1 = 0)$: غتبر كثير الحدود $(2 + 4(x) - 4x^3 - 8x^2 - x + 2)$: ثم بين أن $(2 + 4x^3 - 8x^2 - x + 2)$ أم بين أن $(2 + 4x^3 - 8x^2 - x + 2)$ أم بين أن $(2 + 4x^3 - 8x^2 - x + 2)$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها . أعداد حقيقية يطلب تعيينها . $(2 + 4x^3 - 8x^2 - x + 2)$ استنتج حلول المعادلة : $(2 + 4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0)$

حل التمرين 05:

 $\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$ (12) $X = \ln x$ $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$: -2 < X < 3 حلولها $X^2 - X - 6 < 0$ ومنه تكون: ln² x-ln x-6 < 0 لما يكون ln² x-m x < 3 $e^{-2} < x < e^3$ $\ln(2x+3) < 5$ 2x+3>0: تكون المتراجحة معرفة إذا كان $x \in \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right] : x \vdash -\frac{3}{2} : \frac{3}{2}$ ln(2x+3) < 5: $x \in \left[-\infty; \frac{e^5 - 3}{2}\right] : x \prec \frac{e^5 - 3}{2} : \text{ of } 2x + 3 \prec e^5$ $S = \left[-\infty; \frac{e^5 - 3}{2} \right] \cap \left[-\frac{3}{2}; +\infty \right] = \left[-\frac{3}{2}; \frac{e^5 - 3}{2} \right]$: ومنه $\ln x > \ln(2x-1)$ (> 2x-1>0 و x>0 تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $0 \rightarrow x$ $x \in [0; +\infty[$: olie x > 0 $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ معناه: $x > \frac{1}{2}$ زي: 2x - 1 > 0 $x \in]0;+\infty[\bigcap \frac{1}{2};+\infty] = \frac{1}{2};+\infty]$ ومنه : $\ln x > \ln(2x-1) : \text{the sum of } 1$ $x \in]-\infty;1[$ ومنه: $x \times 2x-1$ $S =]-\infty; 1[\cap \left| \frac{1}{2}; +\infty \right| = \left| \frac{1}{2}; 1 \right| : 0$ $x.\ln x - \ln x \ge 0$ $x \in]0;+\infty[$: $0 \times x \to 0$ تكون المتراجعة معرفة إذا كان $(x-1).\ln x \ge 0$ أى $x.\ln x - \ln x \ge 0$

$$x > 0$$
 نضع $X = \ln x$ نضع $4X^3 - 8X^2 - X + 2 = 0$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}; \ln x = \frac{1}{2}; x = e^{\frac{1}{2}} \\ X = \frac{-1}{2}; \ln x = \frac{-1}{2}; x = e^{\frac{-1}{2}} \end{cases}$$

$$X = 2; \ln x = 2; x = e^2$$

$$X = 2; \ln x = 2; x = e^2$$

$$S = \left\{ e^{\frac{1}{2}}; e^{\frac{-1}{2}}; e^2 \right\}$$
ومنه

التمرين 06:

اختر الجواب الصحيح مع التبرير .
$$\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0$$
 إلى المتراجحة $0 < 0$ في مجموعة الأعد الحقيقية هي المجموعة $S = \frac{1}{2} - \infty$; $1 = -\infty$;

$$f'(x) = x.f(x) + 2$$
 $f'(x) + f(x) = 2x + 5 + x \ln x$
 $f(x) - xf'(x) = -x + 1$
 $f'(x) = 2f(x) - x \ln x$
/

بيان الدالة $f(x) = x.e^x$: عيث $f(x) = x.e^x$ يقبل في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ماسا عند النقطة توجيهه يساوي:

. 1 / 2 ، جا 1 - ، د/ 1 . $\lim_{x\to\infty} \left[2x-x.\ln(x-1)\right]/4$

$$4(\ln|x|)^2 - 1 = 0$$
 /

 $x \neq 0$: المعادلة معرفة إذا كان

$$X^2 = \frac{1}{4}$$
 : فضع $X = \ln|x|$ ومنه : $X = \frac{1}{2}$ ومنه : $X = \frac{-1}{2}$ ومنه : $X = \frac{1}{2}$ ومنه : $X = e^{\frac{1}{2}}$ ومنه : $X = e^{\frac{1}{2}}$

$$S = \begin{cases} x = -e^{-2} & \text{if } (x = e^{2} - x = -e^{2}) \\ (x = e^{-2} - x = -e^{2}) & \text{if } (x = e^{2} - x = -e^{2}) \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} & \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} \\ e^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} & \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x - 2$$
 (2)

$$\begin{cases} a=4\\ b-2a=-8; b-8=-8; b=0\\ c-2b=-1; c=-1\\ -2c=2; c=-1 \end{cases}$$

$$A(x) = (x-2)(4x^2-1)$$
 ومنه : $R(x) = 0$ في $A(x) = 0$

$$(x-2)(4x^2-1)=0$$
: $A(x)=0$

$$x=2$$
: ومنه $x-2=0$:

$$x = \frac{-1}{2}$$
 أو $x = \frac{1}{2}$: أو $x = \frac{1}{4}$: أو $(4x^2 - 1) = 0$ أو $S = \left\{2; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$ ومنه

ج) استنتاج حلول المعادلة:

$$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

حل التمريين 06 :

: تكون المتراجحة معرفة إذا كان
$$\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0$$
 (1) $\frac{x+2}{x-1} > 0$

قيم ٪	∞	-2		1	+ ∞
إشارة x+2	•	P	+		+
إشارة x-1	-		-	9	+
إشارة النسبة	+	9	-	9	+

$$x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$$
 ومنه: $\frac{x+2}{x-1} < 1:$ ولدينا $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < 0:$ اي $\frac{3}{x-1} < 0:$ اي $\frac{x+2}{x-1} - 1 < 0:$ ومنه: $\frac{3}{x-1} = 1$

ومنه:

$$S = (]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[)\cap (]-\infty;1[) =]-\infty; -2[$$

a substituting the substitution of the

قابلة للاشتقاق على المجال
$$f(x) = 2x + 1 + x . \ln x$$
(2) :]0;+∞[

$$f'(x) = 2 + 1.\ln x + \frac{1}{x}.x = 3 + \ln x$$

$$f'(x) \neq x.f(x) + 2$$

$$f'(x) + f(x) \neq 2x + 5 + x \ln x$$

$$f'(x) \neq 2f(x) - x \ln x$$

$$f(x) - xf'(x) = 2x + 1 + x. \ln x - 3x - x \ln x$$

= -x + 1

$$f(x) = x.e^{x} (3$$

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$
:

ولدينا : $I = (1+0)^{(0)} = e^{(0)} (0+1) = 1$ (معامل توجيه الماس عند النقطة O) معناه الإجابة الصحيحة هي : (د) .

$$\lim_{x \to +\infty} \left[2x - x \cdot \ln(x-1) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \cdot (2 - \ln(x-1))$$

fiften and

(لأن : ∞ + \leftarrow ، و ∞ - (1 - 1) 2) معناه الإجابة الصحيحة هي : (1) .

التمرين 07:

و دالة معرفة على IR به IR دالة معرفة على IR به IR و IR و IR دالة معرفة على منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس IR ($O; \vec{I}; \vec{J}$) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس I أدرس تغيرات الدالة I.

بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتها.

(C) مركز تناظر للمنحى $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحى $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$

A أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A

التكن ع الدالة المعرفة على ١٨ كمايلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

 $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1 + e^x)^2}$: IR is x by $\frac{1}{4(1 + e^x)^2}$

6/ شكل جدول تغيرات الدالة ع.

IR لم إستنتج إشارة g(x) على

Tاستنتج الوضعية النسبية للمهاس T) بالنسبة إلى المنحني T

8/ أرسم المنحني (C).

حل التمرين 07:

IR معرفة على f: f معرفة على f

$$\lim_{x \to \infty} e^x = 0 \text{ if } \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x (e^{-x} + 1)} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$(\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0)$$

f قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{e^x (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

f'(x)0: IR اذن: من أجل كل x من

منه جدول تغيرات الدالة f:

x قيم	-∞	+∞
f'	+	
f	0	l

2) المستقيمات المقاربة:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$
 الدينا:

إذن: المستقيم ذو المعادلة
$$y=0$$
 مقارب للمنحنى (C) في جوار ∞ –

ا اذن: المستقيم ذو المعادلة
$$y=1$$
 مقارب المستقيم $y=1$ المستقيم المستقيم

$$(-x) \in IR$$
 فإن: IR فإن (3) من أجل كل x من أجل كل

$$[2(0)-x] \in IR \ \, [$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$2(1/2) - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$f(2(0)-x)=2(1/2)-f(x)$$

$$(C)$$
مركز تناظر للمنحنى $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ إذن: النقطة

عادلة الماس عند النقطة
$$A\left(0;\frac{1}{2}\right)$$
 تكتب من الشكل:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$
:

g (5 قابلة للإشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$
$$= \frac{1+2e^x + e^{2x} - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{\left(1 - e^{x}\right)^{2}}{4\left(1 + e^{x}\right)^{2}} = \frac{\left(e^{x} - 1\right)^{2}}{4\left(1 + e^{x}\right)^{2}} = \frac{1 - 2e^{x} - e^{2x}}{4\left(1 + e^{x}\right)^{2}}$$

وما
$$(e^x-1)^2$$
 من إشارة $(e^x-1)^2$ الأن المقام دوما $g'(x)$ من إشارة وما ولدينا:

x قیم	-∞	0	+∞
إشارة (٢)	+	þ	+

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = -\infty$$

 $(\lim_{x \to 0} f(x) = 0)$

النمرين 08

 $(\lim_{x\to\infty} xe^x)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ الحدف من هذه المسألة هو حساب:

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$
: حيث [0;+∞] حيث f

- . f''(x) و f'(x) و (1
- عين إشارة $e^x 1 \ge 0$: على إشارة R
- و استنتج اتجاه تغير الدالة f''(x) على المجال f''(x)
 - f'(x)
 - 3) شكل جدول تغيرات الدالة f' (النهايات لا يطلب حسابها) ثم استنتج إشارة f' .
 - 4) عين اتجاه تغير الدالة f و استنتج إشارتها .
- : فإن $]0;+\infty[$ فإن x من أجل كل x من أجل كل أثبت أنه من أجل كل
 - $\cdot \frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ = riting positive positive

 $\lim_{x\to\infty} xe^x$

- 7) بالاعتباد على ما سبق أحسب:
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} (2 \cdot \lim_{x \to +\infty} (e^x x) (1$
- $\lim_{x \to -\infty} (2x 1)e^{x} (4 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} e^{x}}{x} (3)$
- $(\lim_{x\to 0} x \ln x)$ استنتج نما سبق حساب لـ ($\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x}$) استنتج نما سبق حساب لـ (8
 - $\lim_{x \to +\infty} (3 x 2 \ln x) (1)$ (9)
 - $\lim_{x \to +\infty} (3 x 2\ln(x+1)) (2$
 - $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 \ln(x 2)}{x + 1}$ (3)
 - $\lim_{x \to 0} \left(2 x \ln x^3\right) (4$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} - f(x)$ $= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} + 1 = +\infty$

(lim
$$f(x)=1$$
 (lim)

منه: جدول تغيرات الدالة g:

$$g(0) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{2} - f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

x قيم	-∞		0		+∞
g'	-	ŀ	ó	+	
g					+∞

 $g\left(x
ight)$ من جدول تغيرات الدالة $g\left(x
ight)$ نستنتج إشارة

x قيم	-∞	0	+∞
g(x) إشارة	_	Ó	+

الوضعية النسبية لـ (C)و (T): لدينا:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x) = g(x)$$

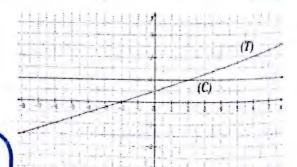
. g(x) إذن: إشارة $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$ هي إشارة

ومنه: لما $[-\infty;0]$ المهاس [T]يقع تحت المنحنى [T]

(C) يقطع المنحنى (x = 0).

(C) يقع فوق المنحنى $x \in (T)$. الماس $x \in (T)$

8-الإنشاء



$$\frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$$
 : $x \in]0;+\infty[$ وبها أنه من أجل $f'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x$: $x \in [0;+\infty[$ من أجل $f''(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x$: $x \in [0;+\infty[$ من أجل $f''(x) = e^x - 1$ فإن $f''(x) = e^x - 1$

$$e^x \ge 1$$
 ي $e^x - 1 \ge 0$: $e^x - 1 \ge 0$ أي $1 \ge 0$ (2) حل في $1 \ge 0$ المتراجعة : $1 \ge 0$ ومنه : $1 \ge 0$ ومنه : $1 \ge 0$ أشارة $1 \ge 0$ أشارة $1 \ge 0$ أشارة $1 \ge 0$

$$f''(x) \ge 0$$
 : $e^x - 1 \ge 0$ فإن $x \in [0; +\infty[$ من أجل $f' : x \in [0; +\infty[$ متزايدة تماما على المجال $f' : (f'(0) = 1) : f'$ المدالة $f'(x) \ge 0$

X قيم	0	+∞
f''(x) إشارة	+	
f'(x)		*
	1	

: f'(x) إشارة

 $x \in [0;+\infty[$ نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل . ومنه f'(x) موجبة تماما $f'(x) \ge 1$

فإن $x \in [0;+\infty[$ موجبة تماما من أجل f'(x) فإن (4 . [0;+ ∞ [الدالة f متزايدة تماما على المجال

إشارة الدالة f

f(0)=1 و f(0)=1 و أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $f(x) \ge f(0)$ $x \in [0; +\infty[$ فإن : من أجل أى: $1 \le f(x)$ ومنه: f موجبة تماما. $f(x) \ge 0$: فإن $x \in]0;+\infty[$ من أجل $e^{x} \ge \frac{x^{2}}{2}$: ومنه: $e^{x} - \frac{x^{2}}{2} \ge 0$: $\frac{e^x}{2} \ge \frac{x}{2}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$
 : لدينا (6

$$\frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$$
 : $x \in]0;+\infty[$ وبها أنه من أجل

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
: فإن $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \ge \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2}$: فإن

$$x = -X$$
: نضع : $X = -x$ أي : $X = -X$ إستنتاج

$$X \to +\infty$$
 : فإن $x \to -\infty$: لا

$$\lim_{X \to -\infty} x \cdot e^{x} = \lim_{X \to +\infty} (-X) \cdot e^{-X}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^{X}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{-1}{e^{X}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0 : e^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x \right) = +\infty - \infty \text{ (F.I) } /1 \text{ (7)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$$

$$(x \to +\infty)$$
 و $\frac{e^x}{x} \to +\infty$: نان)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (F.I) } /2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$
 ولدينا: 0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty} \text{ (F.I) /3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} (1 - e^{x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} (1 - e^{x}) = -\infty$$

$$(1-e^x \to -\infty, \frac{e^x}{x} \to +\infty: \dot{y})$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - 1) e^x = -\infty \times 0 \text{ (F.I) } /4$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - 1) \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \left[2x e^x - e^x \right] = 0$$

$$(e^x \to 0, x e^x \to 0 : \dot{\psi})$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3 - x - 2\ln(x+1))$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1) \left(\frac{3}{x+1} - \frac{x}{x+1} - 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$$

=-00

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$
 \(\frac{1}{2}\)

$$(\lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 :$$
 لأنها من الشكل

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln(x - 2)}{x + 1}$$

$$(3)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x-2)}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x+1} \times \frac{\ln(x-2)}{x-2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(2 - x \ln x^3 \right) = \lim_{x \to 0} \left(2 - 3x \ln x \right) = 2 (4)$$

التمرين 09:

الهدف من هذه المسألة هو حساب:

$$(\lim_{x\to-\infty}x^ne^x \, \, \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n})$$

$$(\lim_{x\to 0} x^n \ln x) \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n})$$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن x

$$e^{x-n\ln x} = \frac{e^x}{x^n}$$

. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$: غم استنج: $\lim_{x \to +\infty} (x - n \ln x)$: احسب (2

$$x^n e^x = \frac{(-X)^n}{e^X}$$
 : بوضع $X = -x$ بین آن $X = -x$

.
$$\lim_{x\to\infty} x^n e^x$$
 ثم استنج

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ (F.I)} \text{ (F.I$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{nX}{e^{nX}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{u}{e^u} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 : \text{dim}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 : \text{dim}$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty) \quad (\text{F.I}) \quad (5$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X^n} \left(\ln \frac{1}{X} \right)$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \left[-\frac{1}{X^n} (\ln X) \right]$$

$$= \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X^n} = 0$$

$$\lim_{X \to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{X \to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^{3} - 2e^{x}) = \lim_{x \to +\infty} x^{3} \left(1 - 2 \cdot \frac{e^{x}}{x^{3}} \right) = -\infty / (6)$$

$$(x^{3} \longrightarrow +\infty) \frac{e^{x}}{x^{3}} \longrightarrow +\infty) : 0$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^{3} - 2x + 1)e^{x} = \lim_{x \to \infty} (x^{3}e^{x} - 2xe^{x} + e^{x}) = -\infty / (2e^{x} \longrightarrow 0) : 0$$

$$(xe^{x} \longrightarrow 0) x^{3}e^{x} \longrightarrow 0 : 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 3\ln(x+1)) \qquad / \Rightarrow$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1) \left[\frac{2x}{x+1} - 3\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$(\frac{2x}{x+1} \to 2 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \to 0) : \forall x \to 0$$

$$(\frac{2x}{x+1} \rightarrow 2)$$
 $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$): ڏن

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n} : - X = \ln x : - (4)$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x : - (5)$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x : - (5)$$

$$\lim_{x \to 0} (x^3 - 2x + 1) e^{x} : - (6)$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1) e^{x} : - (6)$$

$$\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 1) e^{x} : - (6)$$

$$\lim_{x \to \infty} (2x - 3\ln(x + 1)) = - (6)$$

$$e^{x-n \ln x} = e^{x-\ln x^{x}} = e^{x} e^{-\ln x^{x}} = \frac{e^{x}}{e^{\ln x^{x}}} = \frac{e^{x}}{x^{x}} (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x - n \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - n \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty (2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n \ln x} = +\infty : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x-n \ln x} = +\infty : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty : \omega_{0} : 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n} e^{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-X)^{x}}{e^{x}} : \omega_{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \frac{1}{+\infty} (F.I) (4)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^{x}}{(e^{x})^{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^{x}}{(e^{x})^{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{xx}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{xx}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{xx}}$$

 $n.X \rightarrow +\infty$: قان : $X \rightarrow +\infty$: u=n.X : برضع



ليكن الدالة إلى المعرفة على الم كيا يلى :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

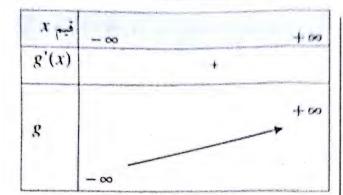
- احسب (x) او استنتج اتجاه تغیر بر وشکل جدول تغیر انها.
- بين أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيد α حيث:
 .0.94 < α < 0.96
 - A عين إشارة 8 على R.
 - : لتكن الدالة f المعرفة على R كها يلي $f(x) = (2x 5)(1 e^{-x})$
 - . R على f ادرس إشارة الدالة f على f
 - . f احسب النهايات على ∞ و ∞ + للدالة f
 - X فإن نه من أجل كل عدد حقيقي X فإن :
- R على $f'(x) = g(x)e^{-x}$ مم استنتج تغيرات الدالة $f'(x) = g(x)e^{-x}$
 - شكل جدول تغيرات (4)
- ر مقارب y=2x-5 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة (C_f) بين أن المستقيم (C_f) بجوار (C_f)
 - (Δ) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .
 - (C_f) بفرض $\overline{(C_f)} \sim 2 + f(\alpha)$ بفرض $\overline{(C_f)}$ بفرض $\overline{(C_f)}$ انشئ (Δ)

حل التمرين 10:

لتكن الدالة ع المعرفة على R كما يلي :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty , \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty (1)$
- $g'(x) = 2e^x + 2 : R$ من اجل کل x من اجل کل 2
- g من أجل كل x من R فإن g'(x) > 0 ومنه الدالة x متزايدة تماما على x .
 - جدول تغيرات 8 :



 3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة و متزايدة على المجال [0,94;0,96]

 $g(0.94) \times g(0.96) < 0$:

g(x)=0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $\alpha=0$ عيث : $\alpha < 0.94$ حيث : $\alpha < 0.96$ عيث : $\alpha < 0.94$

4) إشارة g على R:

- ∞	α	+ ∞
-	0	+
	<u>-</u> ∞	-∞ α - 0

: لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلى \bullet

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$

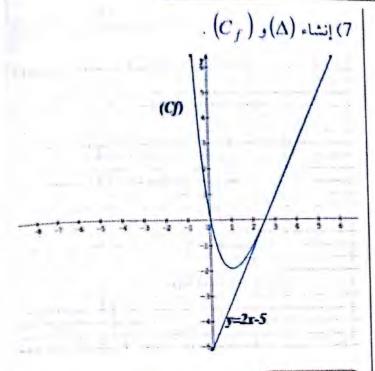
R على f على (1) دراسة إشارة الدالة f

x قيم	- 8	0		<u>5</u> 2	+∞
إشارة 2x - 5	-		- (5	+
$1-e^{-x}$ إشارة	-	0	+		+
f(x) إشارة	+	0	- (5	+

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x}) = +\infty (2x - 5)(1 - e^{-x})$

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x - 5)(1 - e^{-x}) = +\infty$

x فإن x فإن عدد حقيقي x فإن (3



التمرين 11:

$$g(x) = 2 + \frac{x-1}{e^x} : R \text{ and } g \text{ } 0$$

 $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 2$: ا) بين أن -1

ب) أدرس تغيرات الدالة g

g(x) = 0 يين أن g(x) = 0 تقبل حلا واحدا g(x) = 0 في المجال -2 . [

R على g(x) على -3

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$$
: R also as R cells as R and R Q

ر (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $\overrightarrow{O}(i,j)$

ا- عين نهايتي f عند ∞ – وعند ∞ +.

(
$$\lim xe^x = 0$$
)

f'(x) = g(x): Rمن f من اجل کل fمن البين انه من اجل کل f و استنتج اتجاه تغير الدالة f

f به منكل جدول تغيرات الدالة f

y = 2x + 1 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $+\infty$ عند $+\infty$ عند $+\infty$ عند $+\infty$

x قيم	- ∞	α		+∞
f'(x)	-	þ	+	
f(x)	+∞	•		+∞
				*
		$f(\alpha)$		

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$
 (5

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 5) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 5)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x} = 0$$

 $\lim_{X \to -\infty} X.e^X = 0$: أنها من الشكل

ومنه المستقيم Δ (Δ) ذو المعادلة y=2x-5 مقارب ماثل لـ C_f بجوار ∞ + .

 (Δ) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ ((Δ)

$$f(x)-(2x-5)=-(2x-5)e^{-x}$$
ندرس إشارة الفرق:

قیم x.	$-\infty$ $\frac{5}{2}$	+∞
إشارة 2x-5	-	+
إثارة **	+	+
$-(2x-5)e^{-x}$	+	-
(c _f) وضعية	ا فوق	غت [-
بالنسبة ل (۵)	1	

 (Δ) ادرس وضعیة المنحنی (C_f) بالنسبة للمستقیم (Δ) عدد (T_n) مستقیم معادلته y = 2x + m عدد حقیقی (T_n)

 (C_{j}) عين العدد الحقيقي mحتى بكون (T_{m}) مماسا للمنحنى T_{m} في نقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

. يين أن (C_p) يقبل نقطة العطاف A يطلب تعيينها.

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1} : \text{if } \alpha = -6$$

$$(\alpha \approx -0.375)$$
. (نأخذ $(C_i)_{i}(\Delta)$). (نأخذ

حل التعرين 11:

$$D_g = R$$
 و $g(x) = 2 + \frac{x-1}{e^x}$: البيان

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2 + \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \frac{1}{e^x} \right) = 2 \quad (1 - 1)$$

$$(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \to 0)$$
 by

ب) دراسة تغيرات الدالة g:

$$g'(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

x					
	- ∞		2		+00
g'(x)		+	0	-	

الدالة g منزايدة تماما على المجال [2;∞-[و متناقصة تماما على المجال]∞+:2].

2-إثبات أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا واحدا α في المجال [-0.38] إ:

ر g(-0,37)×g(-0,38)<0 نانه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحدا مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(\alpha)=0$. $g(\alpha)=0$ بحيث $g(\alpha)=0$ على $g(\alpha)=0$ على $g(\alpha)=0$ على $g(\alpha)=0$ على $g(\alpha)=0$.

x	∞	α	+ ∞
g(x)	_	0	+

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$$
: بالة معرفة على $f(x) = 2x + 1 - \frac{x}{e^x}$ دالة معرفة على $f(x) = 1$ دالة معرفة على $f(x) = 1$

$$(\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$$
) کان

$$\lim_{-x \to -\infty} \left(-xe^{-x}\right) = 0$$
 کن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال R و لدينا:

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = 2 + \frac{x-1}{e^x} = g(x)$$

g(x) هي من إشارة f'(x)

X		α	+∞
f'(x)	_	0	+

 $\cdot f$ جدول تغيرات الدالة

х	-∞		α	+∞
f'(x)		-	0	+
f(x)	+∞	$\int_{f(\alpha}$		+∞

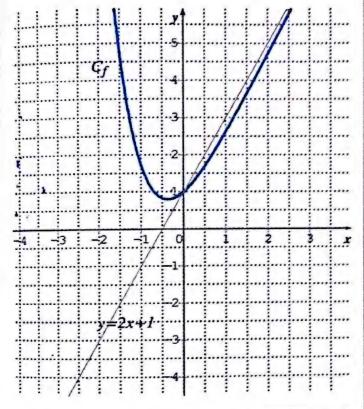
 (C_f) المستقيم (Δ): y = 2x + 1 مقارب لـ (أ -3)

 $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+1)) = 0$ aik $\infty + \infty$ aik

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$
: بالتعویض فی $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ بالتعویض فی $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ خرید $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)$ نجد

$$f(-0,375) = \frac{2(-0,375)^2 + (-0,375) - 1}{(-0,375) - 1}$$

\$\approx 0,8977



التمرين 12:

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال]∞+, 2-] كما يلي :

ان عددان a عددان $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ و عددان .

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $(C_{f'})$ وحدة الطول (c_{i}, \vec{j}) وحدة الطول (c_{i}, \vec{j})

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة A(-1,1) تتعي A(-1,1) إلى $A(C_f)$ و معامل توجيه المماس عند A يساوي $A(C_f)$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+1)) = \lim_{x \to +\infty} (-\frac{x}{e^x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$+ \infty \text{ sign}(C_f) = -\frac{x}{e^x} = 0$$

$$f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x} = 0$$

X	more (X)	()	+00
$f(x) - (2x+1) = -\frac{x}{e^x}$	+	0	design and the second s
الوضعية	ايقع فوق (Δ)	C_f) (Δ)	يقع تحت (C_f)

$$m \in R$$
 حيث $(T_m): y = 2x + m: حيث -4$
 $f'(x) = 2 = g(x)$ معناه (C_f) معناه (T_m)
 $I(1; f(1))$ معناه $x = 1$ تكافئ $g(x) - 2 = 0$
 $f(1) = 3 - e^{-1}$
حيث $(T_m): y = 2(x - 1) + 3 - e^{-1} = 2x + 1 - e^{-1}$
 e^{-1}
 e^{-1}

$$f''(x) = g'(x) = \frac{2-x}{e^x}$$
 : الدالة $f''(x)$ قابلة الاشتقاق على المجال $f''(x) = g'(x) = \frac{2-x}{e^x}$ على المجال $f''(x) = 0$ تكافئ $f''(x) = 0$ $f(2) = 5 - 2e^{-2} \approx 4,72$ حيث $f''(x) = 0$: $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$ نان $f''(x) = 0$ بيا أن $f''(x) = 0$ فان $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{\alpha}{e^{\alpha}}$ بيا أن $f''(x) = 0$ فان $f''(x) = 0$ وعليه $f''(x) = 0$

العنبر الثالثة العددية في للمتغير الحقيقي 8 المعرفة
 على المجال [8+2-] كما يلي:

 $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ نفس للمام السابق.

النتيجة بيانيا. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$ وعبر هذه النتيجة بيانيا.

$$\left(\lim_{n\to\infty}ue^n=0\right)_{\infty\to\infty}$$

ب/ أدرس تغيرات المالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها . g يبن أن المنحنى g ينبل نقطة انعطاف g يطلب تعيين (احداثيبها).

د/ أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة 1. هـ/ أرسم (C_g) .

(اا) لتكن العالة المرفة على المجال] ٢٠٠٥ - كما يلي:

$$K(x) = g(x^2)$$

باستعمال مشتقة دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

حل التعرين 12:

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$$
 (1)

$$f'(-1) = -e \cdot f(-1) = 1 : = b \cdot a$$

$$[-2,+\infty[$$
 تقبل الاشتقاق علی f

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$$

$$f'(x) = -(ax + b - a)e^{-x} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (-a+b)e+1=1 \\ -(-2a+b)e=-e^{-c^{2}} \end{cases} \begin{cases} f(-1)=1 \\ f'(-1)=-e^{-c^{2}} \end{cases}$$

$$f(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$
; $\xi^{\dagger} b = -1$, $\alpha = -1$

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$
 (11)

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-xe^{-x} - e^{-x} + 1 \right) = 1^{-1/(1-x)}$$

 $+\infty$ عند (C_g) : يقبل مستقيم مقارب أفقي عند y=1

ب) دراسة تغيرات الدالة: g

 $g'(x) = xe^{-x} : [-2, +\infty[$ يقبل الاشتقاق على $g'(x) = xe^{-x}$ الشارة g'(x) من إشارة g'(x)

x	-2	0	+∞
g'(x)	-	þ	+

g متناقصة تماما على [2,0] و متزايدة تماما على]∞+,2] جدول تغيرات الدالة g.

х	-2	0	+∞
f'(x)	-	- φ	+
	$1+e^2$		1
f(x)			

: $[-2,+\infty[$ تقبل الاشتقاق على $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

х	-2		1	+∞
g''(x)		+	þ	

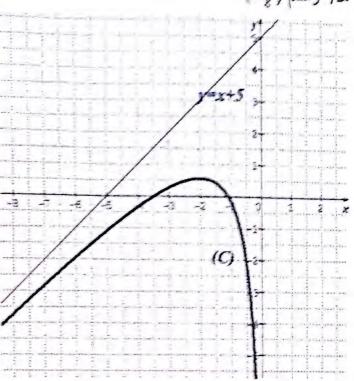
الدالة المشتقة الثانية g'' انعدمت عند I و غيرت من I المارتها بجوار I إثنارتها بجوار I إذن النقطة I I هي نقطة انعطاف للمنحنى I I I .

: I as $\left(C_{g}\right)$ aic $\left(C_{g}\right)$ aic $\left(C_{g}\right)$

(T):
$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

$$y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e}$$
, $y = \frac{1}{e}(x - 1) + 1 - \frac{2}{e}$

 $:(C_g)_{max}$



K (III) كا تقبل الاشتقاق على إعد +. 2 -] حيث:

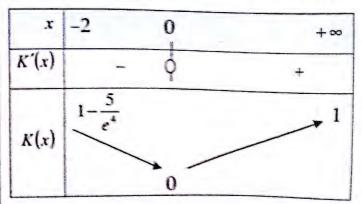
$$K'(x) = 2x \ g'(x^2)$$

$$K'(x) = 2xx^2e^{-x^2} = 2x^3e^{-x^2}$$

x اشارة K'(x) عي إشارة

K متناقصة تماما على المجال [2,0] و متزايدة تماما على المجال]∞+,0]

جدول تغيرات K:



النعريز 13:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $f(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

- (C_{j}) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعا، والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- اً-أحسب f(x) ، ثم فسّر النتيجة هندسيا $\lim_{x \to \infty} f(x)$. $\lim_{x \to \infty} f(x)$
- ر بین آنه من أجل كل عدد حقیقی x من [0]0. $f'(x) = \frac{x^2 x 6}{x(x 1)}$

استنتج اتجاه تغیّر الداله f، ثم شکّل جدول تغیراتها.

y = x + 5 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: 5 + x + 5 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞ -.

 (Δ) بالنسبة للمستقيم (C_f) بالنسبة للمستقيم

- و مين α يين أن المعادلة α يين أن المعادلة α و α تقبل حلّين α و α حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$
 - (Δ) والمستقيم ((C_f)) أنشئ المنحنى ((Δ)).
 - $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ أ- نعتبر النقطتين (6

 $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

ييّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم .(AB)

 M_0 يمس المنحنى (C_f) في نقطة (AB) يمس المنحنى بين أن المستقيم يطلب تعيين إحداثيتيها.

حل التمرين 13 :

الم التفسير النتيجة هندسيا: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[x + 5 + 6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] = -\infty$ $\lim_{x \to 0} \left[6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] = -\infty$ $\text{Yن:} = -\infty$

ومنه المنتقيم الذي معادلته x=0 مستقيم مقارب عمودي. $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} (x+5) = -\infty \quad \lim_{x \to -\infty} \left[6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x+5+6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{if } x \to -\infty$$

،]-∞;0[من أجل كل عدد حقيقي x من]0;∞-(x') $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$

الدالة رقابلة للاشتقاق على المجال]0;∞-[و دالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)} : \emptyset$$

استتاج اتجاه تغیرات الدالة f و تشکیل جدول تغیراتها: إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل کل عدد حقیقی x من x^2-6 : x(x-1)>0.

x = 3 ومنه x = -2 ومنه $x^2 - x - 6 = 0$ وهومقبول أو x = -3 وهومرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $[-2;\infty-[$ و f متناقصة [-2;0] متناقصة [-2;0] متناقصة

جدول التغيرات:

$$\begin{array}{c|cccc}
x & -\infty & -2 \\
f'(x) & + & & & \\
\hline
f(x) & & & & \\
\end{array}$$

y = x + 5 أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة واثبات أن المستقيم مقارب مائل:

المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

.
$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+5) \right] = 0$$

$$f(x) - (x+5) = 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
: لدينا:

 $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (x+5) \right] = \lim_{x \to \infty} 6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = Ln1 = 0$ إذن: y = x + 5 ذو المعادلة (Δ) ذو المعادلة

 $-\infty$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار

 (Δ) والمستقيم ((C_f)) والمستقيم ((Δ)) والمستقيم

: دراسة إشارة الفرق
$$[f(x)-(x+5)]$$
 : لدينا : $f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]0;∞ – [يكون لدينا x > x - 1 .

ومنه $1 > \frac{x}{x-1}$ لأن (x-1) عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: $2n + \frac{x}{x-1} < Ln$ وبالتالي

يقع تحت (C_f) يقع تحت f(x)-(x+5)<0 .]- ∞ ; 0[المستقيم (Δ) من أجل كل (Δ) من المجال

eta و α تقبل حلّين α و α إثبات أن المعادلة α

 $:-1,1<\beta<-1$ و $-3,5<\alpha<-3,4$

الدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال f مستمرة و المجال f مستمرة f فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه :

$$f(-3,5) = -3,5+5+6\ln\left(\frac{3,5}{4,5}\right) \approx -0,007$$

$$f(-3,4) = -3,4+5+6\ln\left(\frac{3,4}{4,4}\right) \approx 0,053$$

$$f(-3,5) \times f(-3,4) < 0$$
وبالتالي

الدوال الأسيت واللوغاريتميت

f(x) = 0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $\alpha = 0$ عقيل حل $\alpha = -3.5 < \alpha < -3.4$

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتبية تماما على المجال من جهة أخرى دالة f مستمرة -1,1;-1 فالدالة f مستمرة و رتبية تماما عليه.

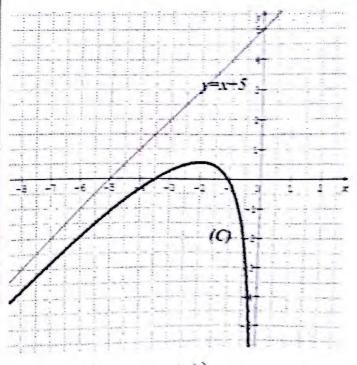
$$f(-1,1)=-1,1+5+6\ln\left(\frac{1,1}{2,1}\right)\approx0.02$$

$$f(-1) = -1 + 5 + 6 \ln \left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.158$$

وبالتالي $f(1) < f(1) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة f(x) = 0 تقبل حل β حيث: $-1.1 < \beta < -1$

وعليه المعادلة f (x) = 0 تقبل حلّين α و β حيث 3,5<α<-3,4 و --3,5.

 (Δ) والمستقيم (C_{j}) والمستقيم (Δ):



$$A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
 ا- نعتبر النقطتين $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و

إثبات أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة M(x,y) نقطة من المستقيم \overline{AB} ومنه: \overline{AB} \overline{AM}

$$\overline{AM}$$
 $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3-6Ln\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ و \overline{AB} $\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ لدينا

يعنى أن: \overline{AB} // \overline{AM}

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1) = 0$$

$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y - 3 - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$

 (C_f) يمس المنحنى (AB) ي نقطة (C_f) يمس المنحنى (C_f) يعني (C_f) عالى: M_0 المستقيم (AB) عاس للمنحنى $(x) = \frac{1}{2}$ أن لهما نفس معامل التوجيه أي $(x) = \frac{1}{2}$ أن لهما نفس معامل التوجيه أي $(x) = \frac{1}{2}$ تعني أن $(x) = \frac{1}{2}$ تعني أن $(x) = \frac{1}{2}$ وبالتالي: $(x) = 2x^2 - x - 12 = x^2 - x$ أي (x) = 1

التمرين 14

 $g(x) = 1 - xe^x$ كما يلي: R كما يلي (I

 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

 α أ- بيّن أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا $g(x) = -1;+\infty$ على المجال $g(x) = -1;+\infty$

g(x)ب تحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج إشارة

ا]) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[2:\infty-[$ كما يلي: $(C_i) \cdot f(x) = (x-1)e^x - x - 1)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0:\vec{i}:\vec{j})$.

- $\lim_{n\to\infty}f\left(x\right)\longrightarrow\mathbf{0}$
- نكن f مشتقة الدالة f ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[2,\infty-[$ فإن: g(x)=-g(x) . f'(x)=-g(x) استنج إشارة f'(x) على المجال $[2,\infty-[$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ين أن
$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$$
، ثم استنتج حصر اللعدد

- $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى $f(\alpha)$).
- y = -x 1 هو y = -x 1 هو المعادلة y = -x 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى y = -x 1 بجوار y = -x 1 مرس وضعية المنحنى y = -x 1 بالنسبة إلى y = -x 1
- x_2 و x_1 تقبل حلّین x_1 و x_2 و x_1 عبین أن المعادلة x_2 المحادلة x_1 = 0 میث x_2 = 0 میث x_1 = 0 میث x_2 = 0 میث x_1 = 0 میث x_2 = 0 میث x_2

حل التمرين 14:

. $g(x) = 1 - xe^x$ كما يلي: R كما يلي (I

 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - xe^x) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - xe^x) = -\infty$$

- دراسة اتجاه تغیرات الدالة g وتشکیل جدول تغیراتها:
- g' دالة قابلة للاشتقاق على g ودالتها المشتقة هي g' حيث:

$$g'(x) = -e^x - xe^x$$

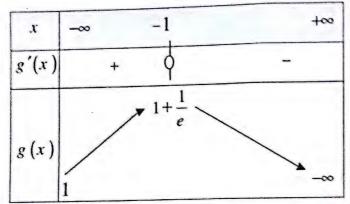
$$g'(x) = (-1-x)e^x$$

إشارة المشتقة من إشارة x – 1 لأنه من اجل كل عدد

حقیقي: 0 × e¹.

لدينا x = -1 ومنه: x = -1 وعليه الدالة y = -1 وعليه الدالة y = -1 متزايدة تماما على المجال x = -1 ومتناقصة تماما على المجال x = -1.

جدول التغيرات:



 α أ- إثبات أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x) = 0 على المجال $[-1;+\infty]$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على $-\infty;1+rac{1}{e}$ المجال $-\infty;1+rac{1}{e}$ وتأخذ قيمها في المجال

g(x)=0 و العدد صفر ينتمي إلى $\left[-\infty;1+\frac{1}{e}\right]$ إذن المعادلة

 $[-1;+\infty]$ على المجال محلا وحيدا α

ب- التحقق أن $g(x) > 0.5 < \alpha < 0.6$ واستنتاج إشارة $g(x) = 0.5 < \alpha < 0.6$ واستنتاج إشارة g(0,6) = -0.09 لدينا: g(0,6) = -0.09 = 0.08 و بها أن $g(0,5) \times g(0.6) < 0.08$

: g(x) إشارة

x		α	+∞
g(x)	+	þ	_

: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ — $\mathbf{0}$ (II)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x - x - 1 = +\infty$$

 $\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x=0 : 3$

(2; ∞, 2] من أجل كل عدد حقيقي x من (2; ∞, -[

$$f'(x) = -g(x) \text{ if } f'(x) = -g(x)$$

 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$ دالة قابلة للاشتقاق على $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$ حيث: $f'(x) = xe^x - 1 = -(-xe^x + 1)$ f'(x) = -g(x)

استنتاج إشارة f'(x) على المجال $[2;\infty-[$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة g(x) وعليه:

X		α	+∞
f' إشارة	-	0	+

ومنه f متناقصة تماما على المجال $[\alpha;\alpha]$. و f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$. جدول التغيرات:

-3

لدينا :
$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 اثبات أن $G(\alpha)$

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)e^{\alpha} - \alpha - 1$$

 $1-\alpha e^{\alpha}=0$: $g(\alpha)=0$ أي: $g(\alpha)=0$ من جهة أخرى لدينا $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$: وبالتالي:

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$
 :وعليه
$$f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$$
 بالتعویض نجد:

y = -x - 1 فا المعادلة (Δ) ذا المعادلة -x - 1 في المعادلة ($-\infty$) المعادلة ($-\infty$) بجوار $-\infty$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (-x - 1) $= (x - 1)e^x$ للدينا: -x - 1 $= (x - 1)e^x$ الذينا: -x - 1 $= \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \to -\infty} (x - 1)e^x = 0$ إذن: -x - 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ومنه ($-\infty$) بجوار $-\infty$.

راسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

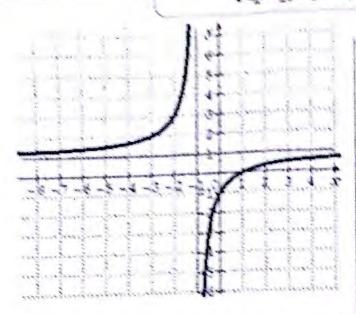
راسة إشارة الفرق [f(x)-(-x-1)]:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$ إشارة الفرق من إشارة (x-1) بالنسبة إلى (x-1) المنارة (x-1)

f(x)-(-x-1)<0 على المجال [-∞;1] على المجال [-∞;1] يقع تحت المستقيم (Δ) وعلى المجال و بالتالي المنحنى (Δ) يقع تحت المستقيم (Δ) وبالتالي المنحنى [1;2] يكون لدينا Δ 0 (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة (Δ) يقطع المستقيم (Δ) عن المعادلة (Δ) = 0 المعادلة (Δ) = 0 المعادلة (Δ) = 0 المدينا : 0.08 = (0.6 - 1.5) و (0.6 - 1.5) = 0.08 e = 0.

إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا x_1 حيث: $-1.6 < x_1 < -1.5$



ال) لنكن الدالة كالمرقة على للجال |عجمال إن

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (رر) المنحى المثل فافي المستوي النسوب إلى العلم التعامد. و المتجانس (تريز ن).

و المتجانس (تریزی): ۱. احسب(۲) بر <u>الله</u> و (۲) بر السباری فسر السبه بین هناسها.

2. أبين أنه من أجل كل علد حقيقي لا من المجال إسهال]

$$g''(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

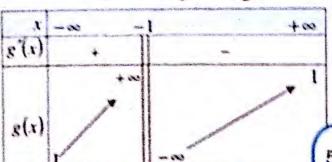
ب. أحسب (x) ثر و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة كر.

3. أ. باستعمال الجزء 1) السؤال ج. هين إشارة العبارة

.] litted the $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

حل التمرين 15:

ا. تشكيل جدول تغيرات الدالة ع:

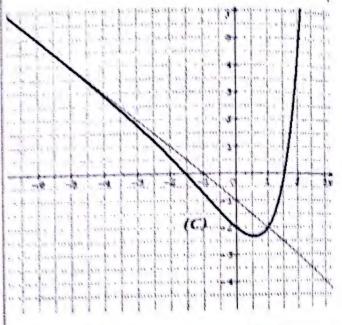


الدينا 0,37 = (1,6) = 0,37 و 0,26 = (1,5) ع او متناقصة تماما على المجال [1,5;1,6] و 0 > (1,6) × f (1,6) على المجادلة (1,5) التقبل حلا وحيدا و د حيث

ان المنحنى ((C_i)) يقطع محود الفواصل في نقطتين هما

 $M_2(x_3;0) \supset M_1(x_1;0)$

- إنشاء (A) و (C,):



المريز 15:

ا) نعتبر الدالة العددية $\{-1\} - R$ المعرفة على كما يلي : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

المعلم المتعامد و المتجانس (O;i;j) المعلم

كايوضعه الشكل المقابل.

أ. شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب. حل بيانيا المتراجعة 0 < (x) ي .

ع. عين بيانيا قيم X التي يكون من أجلها 1 > (x) < 0

. حل بيانيا المتراجعة 9(x)>0

g(x) > 0 هو:

 $x \in -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

0 < g(x) < 1 ج. تعیین بیانیا قیم x التی یکون من أجلها

 $x \in]1;+\infty[: U \ 0 < g(x) < 1]$ من البيان

[I] لتكن الدالة f المعرفة على المجال f بد:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

 $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ 1.

و تفسير التيجتين هندسيا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right] = -\infty$$

التفسير البياني:

x=1 مستقیم مقارب عمودي یوازي (yy') بجوار x=1 y=1 مستقیم مقارب أفقي یوازي (xx').

ك. أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال 2

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
:]1;+ ∞ [

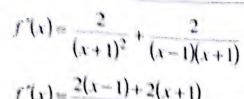
الدالة ع قابلة للإشتقاق على المجال]∞+; [ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

 $_{-}$ حساب f' و دراسة إشارتها:

الدالة أر قابلة للإشتقاق على المجال]∞+;1 [و دالتها

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$



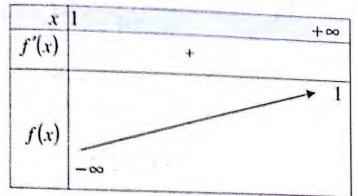
$$f'(x) = \frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$(x+1)^2(x-1) = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{4x}{(x+1)^2} > 0$$
 و عليه من أجل كل x من

:]1,+∞

f'(x) > 0 و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال f(x) > 0 جدول تغيرات الدالة f(x) = 0



$$[1] : -\infty[$$
 العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $-\infty$ على العبارة العبارة العبارة $-\infty$ على المجال $-\infty$ على المجال المجال

التمرين 16:

 $I = \int \frac{1}{2} + \infty$ المجال f المحدية المعرفة على المجال f بالمجال f (C,) المحدد f (x) = $1 + \ln(2x - 1)$ بالمحدد f المحدد f المحدد f المحدد f المحدد و المتجانس f (O, i, j).

 $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال 1 ثم شكل جدول تغيراتها .

جدود عن فاصلة النقطة (C_f) التي يكون فيها المهاس موازيا (C_f) دي المعادلة y=x .

f(x) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة f(x) أثبت أنه من أجل كل a من $f(x) = \ln(x+a) + b$ على الشكل a عددان حقيقيان يطلب تعيينها a

ب(C) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبرية (C_f) ثم ارسم (C_f) و

I نعتبر الدالة g العددية المعرفة على المجال I

$$g(x) = f(x) - x$$

. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$: ئم بين أن $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x)$ احسب (1)

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

قبل في g(x) = 0 ثم بين أن المعادلة g(x) = 0 تقبل في

. $2 < \alpha < 3$: المجال $\frac{3}{2}$ حلا وحيدا α . تحقق أن

 $\left[\frac{1}{2},5\right]$ ب ارسم $\left(C_{g}\right)$ منحنى الدالة g على المجال المابق .

g(x) استنتج إشارة g(x) على المجال g(x) ثم حدد وضعية المنحنى $g(c_f)$ بالنسبة إلى $g(c_f)$.

1, lphaا برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال 0, lpha فإن 0, lpha ينتمي إلى المجال 0, lpha للجال 0, lpha ينتمي إلى المجال 0, lpha

نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* كما يلي (III) . $u_n = f\bigg(1 + \frac{1}{2n}\bigg)$

التي من أجلها يكون n عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $u_n = 1 + 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

احسب بدلالة
$$n$$
 المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 16 :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 1} : الدالة f'(x) = \frac{2}{2x - 1} : الدالة f'(x) = \frac{2}{2x - 1} : الدالة أيان الاشتقاق على الولدينا : f'(x) > 0$$

$$e \quad \text{ على المجال 1، و يكون جدول تغيراتها كما يلي : }$$

x	1	+∞
f'(x)	+	, ~
$f(\mathbf{r})$		+∞
f(x)	-80	

(3) كي يكون الماس موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق $x_0: f'(x_0) = 1$ ما يلي : $1 = f'(x_0) = 1$ حيث : $x_0 = \frac{3}{2}$ أي $\frac{2}{2x_0 - 1} = 1$ تعني $1 = \frac{3}{2}$ أي $\frac{3}{2}$ أي $\frac{3}{2}$ (4) أ) لدينا من أجل كل $x_0: f'(x_0) = 1$

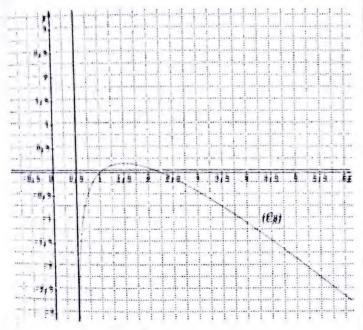
$$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
 $=1+\ln 2+\ln \left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln(2e)+\ln \left(x-\frac{1}{2}\right)$
 $b=\ln 2e$ و $a=-\frac{1}{2}$: و منه : $a=-\frac{1}{2}$ فإن $a=-\frac{1}{2}$ في $a=-\frac{1}{2}$ فإن $a=-\frac{1}{2}$ في $a=-\frac$

$$\left[\frac{3}{2},+\infty\right]$$
 الدالة g رتيبة تماما على المجال $g(1)=0$ (3 و بالتالي صورة المجال $\left[\frac{3}{2},+\infty\right]$ بالدالة g همي المجال . $\left[-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right]$

و بها أن
$$0 < 2 + \ln 2 > 0$$
 ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة $\frac{3}{2} + \infty$ من المجال $\frac{3}{2} + \infty$

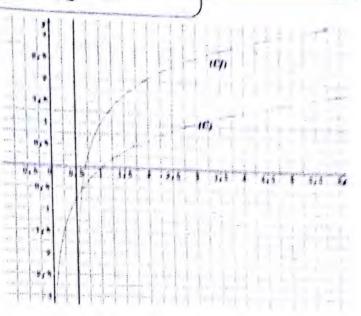
$$[2,3]$$
 الدالة g رتيبة تماما على المجال $g(\alpha) = 0$ بحيث $g(2)g(3) < 0$ و بها أن $g(2)g(3) < 0$ أن $g(3) < 0$

$$: (C_g)$$
 ب $)$ رسم



$$x \in [1, \alpha]$$
 لما $g(x) \ge 0$ حسب البيان فإن $0 \ge 0$ لما $g(x) \le 0$ و $0 \ge 0$ لما 0 لما 0 المراسة إلى 0 بدراسة إشارة تتحدد وضعية المنحني 0 بالنسبة إلى 0 بدراسة إشارة الفرق 0 براسة إلى 0 و كها هو موضح سابقا فإن في

المجال
$$[1,lpha]$$
 يكون (C_f) تحت (d) و في المجال $[1,lpha]$ يكون (C_f) يكون $[lpha,+\infty[$



$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} 1 + \ln(2x - 1) - x = -\infty (1011)$$

$$\ln 2e \approx 1.7 : 2e = 1.7 : 2$$

2 الدالة g تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$g'(x) = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

$$x < \frac{3}{2}$$
 لا $g'(x) > 0$: حيث $x = \frac{3}{2}$ تعني $g'(x) = 0$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$
 لا $g'(x) < 0$

و منه جدول تغير الدالة g يكون كما يلي :

$g'(x)$ + 0 - $-\frac{1}{2} + \ln 2$	x	1	3	+ ∞
1		2	2	
$-\frac{1}{1+\ln 2}$	g'(x)	+	0	-
			$\frac{1}{2} + \ln 2$	
	g(x)			-00

وفسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

 (Δ) يين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاريين (3)

. y = x + 1 و y = x و الترتيب y = x + 1

 (Δ') ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}
ight)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\omega\left(\mathcal{C}_{t}
ight)$.

5) أ) بين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلين α و β حيث : $-1.4 < \beta < -1.3$ و $1 < \alpha < 1$

 (Δ) ب المل توجد مماسات لـ: (C_f) توازي المستقيم (Δ) (Δ') و ارسم (Δ) .

حل التمرين 17:

 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$

 $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = +\infty , \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty (\psi$

هذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة x=0 مستقيم مقارب للمنحنى $\binom{C_f}{}$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على مجالي تعريفها و لدينا :

$$f'(x) > 0$$
 وعليه $f'(x) = 1 + \frac{e^x(e^x)}{(e^x - 1)^2}$

إذن الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها و يكون جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	-∞	0		+∞
f'(x)	+		+	
	+∞			+∞
f(x)				
		- o	5	

 $[1, \alpha]$ و بالتالي من أجل $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$ على $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$ و لكن $f(1) \le f(x) \le f(\alpha)$ نجد $f(1) \le f(x) \le \alpha$ و لكن f(1) = 1 و لكن f(1) = 1 و لكن g(1) = 1 و

 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2\times 1}\right)$ (2) +1+\ln\left(1 + \frac{1}{2\times 2}\right) + \dots + 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2\times n}\right)

$$= n + \ln\left(\frac{3}{2\times1}\right) + \ln\left(\frac{5}{2\times2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$$
$$= n + \ln\frac{3\times5\times7\times\dots\times(2n+1)}{2^2\times1\times2\times3\times\dots\times n}$$

 $S_n = n + \ln \frac{3 \times 5 \times 7 \times ... \times (2n+1) \times 2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n}{2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times ... \times n)^2 \times 2^n}$

$$= n + \ln \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

التعرين 17:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R^* كما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ نرمز بـ $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (0, i, j) . $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$

 $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \text{ i.i.d.} (1)$ $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} (C_f)$ $\lim_{x \to \infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-1 - \frac{1}{e^x - 1}) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-1 - \frac{1}{e^x - 1}) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$ $\lim_{x \to$

X	-∞	0	+∞
1	+		The state of the s
$e^{x}-1$			

إذن في المجال $[0,+\infty]$ يكون $[0,+\infty]$ فوق $[0,+\infty]$ و في المجال $[0,+\infty]$ يكون $[0,+\infty]$ تحت $[0,+\infty]$ المجال $[0,+\infty]$ بالنسبة إلى $[0,+\infty]$ ندرس الفرق $[0,+\infty]$ بالنسبة إلى $[0,+\infty]$ ندرس الفرق $[0,+\infty]$ وعليه :

X	-∞	0	+∞
$-\frac{e^x}{x}$	+		-

إذن في المجال $]0, \infty - [$ و في المجال يكون (C_f) فوق . (Δ') و في المجال $]0, +\infty [$ يكون (C_f) تحت (Δ') عب (Δ') حتى تكون النقطة $(0, \frac{1}{2})$ مركز تناظر (C_f) يجب تحقق ما يلي : مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة إلى العدد (C_f) و هو محقق ، و من أجل كل (C_f) من (C_f) عب (C_f) العدد (C_f) و هو محقق ، و من أجل كل (C_f) من (C_f) من (C_f)

$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-$	لدينا : ا
$f(-x) + f(x) = -\frac{e^x}{1 - e^x} - \frac{1}{e^x - 1}$	e^x-1
$f(-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1}$	1
e^x-1 e^x-1 e^x-1 النقطة $\omega\left(0,rac{1}{2} ight)$ هي مركز تناظر	

(5) أ) الدالة
$$f$$
 رتيبة تماما على المجال $[\ln 2, 1]$ و لدينا: $f(1) \approx 0.42$ لأن $f(1)f(\ln 2) < 0$

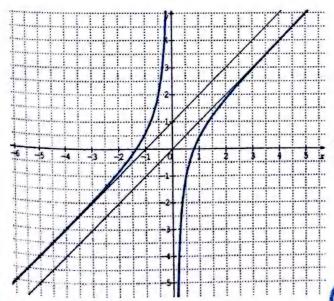
و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه $f(\ln 2) \approx -0.31$ و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[\ln 2,1]$ بحيث : $f(\alpha) = 0$ من المجال $f(\beta) = 0$ بحيث : $f(\beta) = 0$ بحيث : $f(\beta) = 0$ بعيث : $f(\alpha) = 0$

$$1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 1$$
 أي $f'(x) = 1$

 R^* و هي معادلة ليست لها حلول في $\frac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = 0$

 (Δ) عا يعني أنه لا توجد مماسات توازي

ج) الرسم:



م دالة عددية معرفة على]∞+;1 - [كما يلى : h

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) \circ \lim_{x \to -1} h(x)$$

: $-1;+\infty$ ين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $-1;+\infty$

$$h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$$
 و استنتج اتجاه تغیر الداله $h'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$ ثم أنجز جدول تغیراتها .

h(0) احسب قيم h(0) احسب قيم h(0)الجزء الثاني:

: يلي الدالة f المعرفة على f+: f كما يلي

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نسمى (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ متعامد ومتجانس

. أأ أحسب $\lim\limits_{x\stackrel{ ilde{}}{
ightarrow}-1}f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة $\lim\limits_{x\stackrel{ ilde{}}{
ightarrow}-1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
 النتيجة المنتخدام النتيجة

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ استنتج

 $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود

. $\left(C_f
ight)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى

 (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المرس وضعية المنحنى المقارب المائل.

 $:]-1;+\infty[$ ين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال.

. $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

y=2 يقطع المستقيم ذو المعادلة (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة



عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 ﴿

 (C_f) أرسم (4

حل التمريين 18:

الجزء الأول:

: كما يلي] $-1;+\infty$ دالة عددية معرفة على h $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

 $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -1} h(x) = -\infty \quad (1)$

ك من أجل كل عدد حقيقي x من المجال (2

$$]-1;+\infty[:h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

 $:h'(x)\succ 0$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال . -1;+∞

> . $-1;+\infty$ متزايدة تماما على المجال h متزايدة ما ما على المجال جدول تغيرات الدالة h:

x قيم	-1	+∞
h'(x)	+	
h(x)		+∞

h(0) = 0 (3)

: 410 9

قيم x	-1	0	+∞
إشارة h(x)	-	. 0	+

الجزء الثاني:

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty /(1)$$

$$x=-1$$
: ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
: ن: اثبات أن

$$x = e^X$$
: نإن $\ln x = X$

$$X \to +\infty$$
: if $x \to +\infty$: if

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty / =$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = 0$$

: معادلته (C_f) معادلته y=x-1

$$f(x) - (x-1)$$
: (a) its interpretable $f(x) = f(x) - (x-1)$

$$f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

X قيم	-1	0	+∞
إشارة : (ln(x−1	-	6	+
إشارة: 1−x	+		+
f(x)-(x-1) : إشارة	+	0	-

. لا $x \in]-1;0[$ لا $x \in]-1;0[$ لا $x \in]-1;0[$ لا $x \in]0;+\infty[$ للائل .

يقطع المقارب المائل.	(C.	فان (x =	0	11
	1-1	, -;-	20	1	L

$$[-1;+\infty]$$
 من أجل كل عدد حقيقي x من المجال) من أجل

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

: f تغیرات f

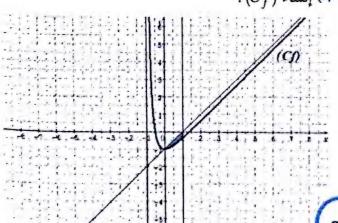
f'(x) -	+
$f(x)$ $+\infty$	≠ +∞

f نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة f مستمرة و متزايدة على [3,3,3,4]

$$f(3,4) = 2,06$$
 $f(3,3) = 1,96$ $f(3,3) = 6(2,3)$

$$f(3,3) \prec f(2) \prec f(3,4)$$
 : أي

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة y = 2 عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و (C_f) :



الدرال 19

 $h(x) = e^x - 2x$: يا يلي R كما يلي $h(x) = e^x - 2x$. $+\infty$ برايات الدالة h عند $-\infty$ و $-\infty$ برايات الدالة h ثم شكل جدول تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

 $-\mu$ اورس تغیرات الدالة μ ثم شكل جدول تغیراتها . μ امنتج أنه من أجل كل عدد حقیقي μ فإن:

 $e^x - 2x \ge 2(1 - \ln 2)$

 $g(x) = x.e^x - 2e^x + 2$ يلي: R كما يلي: R

 $\lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0$: فأثبت أن $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ الم

(1 = -x : (1 = -x))

لم استنتج نهاية الدالة B عند 00 .

x فإن: x فإن: x فإن: x

ثم أحسب نهاية الدالة $g(x) = e^x . (x - 2 + 2e^{-x})$ على $g(x) = e^x . (x - 2 + 2e^{-x})$ على $g(x) = e^x .$

ج/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها . α أدرس تغيرات الدالة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا α حيث 1.7<0 . $1.5<\alpha<1.7$

x احب g(x) ثم استنتج إشارة g(0) حسب قيم g(0) من g(0)

 $[-\infty; \ln 2]$ المجال $f(x) = \frac{-e^x + 4x - 2}{e^x - 2x}$: المجال R کہا یا ہے کہا ہے المجال الم

ولبگن(C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد2cm .

/ احسب نهایات الدالة ∫ عند ∞ – و ∞ + وفسر التالج بیانیا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي X فإن:

$$f$$
 الدالة $f'(x) = \frac{-2 \cdot g(x)}{\left(e^x - 2x\right)^3}$

وليكل جدول تغيرانها.

ج/ • عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقميم (α) والمستقميم (α) الذي معادلته α α أدرس وضعية (α) بالنسبة لـ(α) عين إحداثيات نقطة تقاطع (α) والمستقيم (α) الذي معادلته α أم أدرس وضعية (α) بالنسبة لـ(α) .

(α) بين أن: α α α α أم استنج حصدا α

ه/ أنشئ (C).

 $f(\alpha)$ للعدد

المراكب المسلم المسلم المحقيقي المستمين المس

و إشارة حلول المعادلة :

$$(m+1)e^x - 2(m+2)x + 2 = 0$$

حل التمرين 19:

 $h(x) = e^x - 2x$: $\lambda R = 0$ and $\lambda R = 0$

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - 2x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right) / 1$$

$$= +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

 $h'(x) = e^x - 2$: فإن x فإن $h'(x) = e^x - 2$ ومنه $h'(x) = e^x - 2$ ومنه $h'(x) = e^x - 2$ ومنة على المجال $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على المجال $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على المجال $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على ومنه $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على ومنه $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على المجال $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على المجال $h'(x) = e^x - 2$ ومناقصة على المجال المغرات:

قيم ٧.	- ∞	ln 2		+∞
إشارة (٢)	-	þ	+	
h(x)	+∞	2 - 2 ln 2	/	+∞

جـ/ نلاحظ من تغيرات الدالة h أن للدالة قيمة حدية صغرى وتساوي $2 - 2 \ln 2$ لما $x = \ln 2$ فرمنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$e^x - 2x \ge 2(1 - \ln 2)$$
 أي $h(x) \ge 2(1 - \ln 2)$

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = \lim_{t \to +\infty} -t \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{e^t} = 0$$

$$(\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty)$$
 ز لأن

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^x - 2e^x + 2 \right) = 2$$
ولدينا: 2

: نانه من أجل كل عدد حقيقي
$$x$$
 فإن $y(x) = x.e^x - 2e^x + 2 = e^x.(x - 2 + 2e^{-x})$

$$\lim g(x) = +\infty ,$$

 $g'(x) = e^{x}(x-1)$: ومنه e^{x} من أجل كل عدد حقيقي e^{x} فإن e^{x} ومنه e^{x} متزايدة على المجال e^{x} ومنه e^{x} متزايدة على المجال e^{x}

جدول التغيرات:

قيم 🗴	-∞	1		+∞
g'(x) إشارة	-	0	+	
g(x)	2			+∞
	-	2-e		

د/ نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة ورتيبة
 على المجال [1.5;1.7]

و 0.2-g(1.7)و و 0.3 g(1.7) أي g(1.7) g(1.5) g(1.5) و 0.2 g(x) = 0 أي g(x) = 0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا α حيث: 1,5 α حيث α α α α α α α α

قيم X	- ∞	0		α	+∞
إشارة (g(x	+	6	_	7	+

x قيم	- ∞	0		α	+∞
f'(x) إشارة	-	0	+	0	-

جدول التغيرات:

X قيم	- ∞	0	α	+∞
إشارة (x) g	_	0 +	6	_
f(x)	-2	_3/	$f(\alpha)$	\

$$e^{x}-2=0$$
 ومنه $\frac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}=-2$ /ج

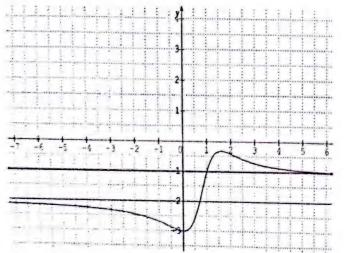
 $x = \ln 2$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي

 $(\ln 2; -2)$ هی: y = -2 معادلته

حصر
$$f(\alpha)$$
: (باستعمال خواص الحصر نجد: $-0.8 < f(\alpha) < 0$)
$$-3 > -2\alpha > -3.4$$
Levil: $1,5 < \alpha < 1,7$
Levil: $0 > -2\alpha + 3 > -0.4$
Levil: $0 > -2\alpha + 3 > -0.4$
Levil: $-0.4 < -2\alpha + 3 < 0$

$$0.5 < \alpha - 1 < 0.7$$
 | $0.5 < \alpha < 1.7$ | $0.5 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0.5}$ | $0.5 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0.5}$ | $0.5 < \alpha < 1 < \frac{1}{0.5}$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < 1$ | $0.5 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1 < 1$ | $0.5 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1$ | $0.5 < \alpha < 1$ | $0.5 <$



$$(m+1)e^{x}-2(m+2).x+2=0$$
 : المناقشة البيانية: $(m+1)e^{x}-2(m+2).x+2=0$: لدينا: $m.e^{x}+e^{x}-2m.x-4x+2=0$: أي: $m.(e^{x}-2x)=-e^{x}+4x-2$ ومنه: $m=\frac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}$

$$x=1$$
 ومنه $2x-2=0$ ومنه $\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}=-1$ ومنه (Δ') ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم $(1;-1)$ الذي $y=-1$ معادلته $y=-1$ هي: $y=-1$ معادلته $y=-1$ النسبة لـ $(x)-y=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$

قيم X	- &	ln 2		+∞
$e^x - 2$ إشارة	_	0	+	
$e^x - 2x$ إشارة	+		+	
f(x) - y إشارة	_	0	+	
وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)	تحت	يقطع		فوق

$$\frac{0}{0.7} < \frac{-(-2\alpha+3)}{\alpha-1} < \frac{0.4}{0.5}$$
 ومنه: $f(x)-y = \frac{2x-2}{e^x-2x}$: (Δ') بالنسبة لـ (C) بالنسبة لـ (C) بالنسبة لـ (C)

قيم X	- ∞	1	+∞
2x-2 إشارة	_	þ	+
$e^x - 2x$ إشارة	+		+
f(x) - y إشارة	<u>-</u>	0	+
وضعية (C)	تحت	يقطع	فوق
(Δ') بالنسبة ل			

$$f(\alpha) = \frac{-e^{\alpha} + 4\alpha - 2}{e^{\alpha} - 2\alpha}.....(1)/2$$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

$$g(\alpha) = \alpha \cdot e^{\alpha} - 2e^{\alpha} + 2 = 0$$

$$(1) = \frac{-2\alpha}{\alpha - 2}$$

$$e^{\alpha} = \frac{-2}{\alpha - 2}$$

ومنه f(x) = m و حلول المعادلة f(x) = m بيانيا هي فواصل نقط تقاطع f(C) والمستقيم الذي معادلته y = m لما g(C) المعادلة لا تقبل حلولا.

- لما 3= = المادلة تقبل حلا معدوما
- لا $m \in]-3;-1$ المادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة.
 - لما [-1;0] المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
 - له $m \in]0; f(lpha)$ المعادلة تقبل حلان موجبان تماما.
 - لما $m = f(\alpha)$ لما المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
 - لا $[m \in]f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلولا.

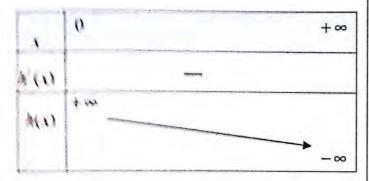
حل التمريين 20

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = 3 - 3x^2 - 2 \ln x : \text{im} \quad h(x) = -\infty \quad \text{im} \quad h(x) = +\infty - 1$$

2- اتجاه تغير الدالة h : الدالة h قابلة الاشتقاق على المجالي] -+;0 و لدينا :

$$h'(x) = -6x^2 - \frac{2}{x} = \frac{-2(3x^2 + 1)}{x}$$

. It say to lot in the hall h'(x) < 0 if μ



: h(x) إشارة h(1) = 0 -3

()		α	+∞
4(1)	+	0	

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$
: is (II)

 $D_f = \left]0; +\infty\right[$ حيث

produce the (C,) was
$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$
 (1 -1)

x = 0مقارب معادلته

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ (\dot{}$$

2- أ) الدالة /قابلة الاشتقاق على المجال إصدار في المينا:

$$f'(x) = \frac{(-3x^2 + x - 1)}{4x^2} + \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2}$$

1) h دالة معرفة على المجال] 0;+00 [ب:

 $h(x) = 3 - 3x^2 - 2\ln x$

1- عين نهايتي ا/عند () و عند∞+.

2- أدرس الحاه تغير الدالة h

.] 0;+ ∞ [علی h(x) علی h(1) میں -3

: الله معرفة على المجال
$$f(\mathbf{II})$$
 دالة معرفة على المجال $f(\mathbf{II})$

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

المتعامد (C_{r}) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O;i,j)

التيجة هندسيا. النتيجة هندسيا. السب النتيجة هندسيا. -1

 $\lim f(x)$ \longrightarrow

 $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2} \text{ then it is not less of } (1-2)$

f'(x) ثم استنتج إشارة $[0;+\infty]$

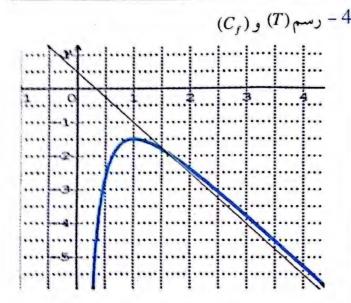
f أنجز جدول تغيرات الدالة f

 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ is the proof of t

(T) أدرس وضعية المنحنى (C_{f}) بالنسبة للمستقيم

-4 ارسم (C_{j}) و (C_{j}) .

1	0	\sqrt{e}	+ ∞
$f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$		0	+
الرضعية	(D) يقع تحت (D)		(C_f) يقع فوق (C_f)



$$\int f'(x) = \frac{-6x^2 + 2}{4x^2} + \frac{4 - 4\ln x}{4x^2} \quad \text{if}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 6 - 4\ln x}{4x^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

x	0		α	+00
f'(x)		+	0	Constitution of the Consti

f با جدول تغيرات الدالة f

h(x) هي من إشارة f'(x)

+	0	-
	$f(\alpha)$	

$$(C_f)$$
 مستقیم مقارب لا $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (أ - 3
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})) = 0$$
 معناه $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}) = 0$ $+\infty$ معناه (C_f) معناه مقارب له $f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ معناه (C_f) معناه (C_f) معناه (C_f) معناه (C_f) تكافئ (C_f) تكافئ (C_f) عيناه (C_f) ع

الهندسةالفضائية

🔳 الجداء السلمي في الفضاء:

 $(\vec{v} \neq \vec{0})$ و $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

 آ و آ شعاعان من الفضاء ، توجد ثلاث نقاط من الفضاء ر بن : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ ای $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C}$

يوجد مستو(P)يشمل النقط A;B;C ومنه الجداء السلمي

للشعاعين أله و لا في الفضاء هو نفسه الجداء

السلمي للشعاعين ii و \bar{v} في المستوى (P) ولدينا الجداء

السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} هوا لعدد الحقيقي:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} = \left\| \overrightarrow{u} \right\|^{2} \xrightarrow{\rightarrow} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{u} \right\| \left\| \overrightarrow{v} \right\| \cdot \cos \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right)$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}: \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$
 فإن: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ فإن:

$$(v \neq 0) \xrightarrow{u \neq 0} (v \neq 0)$$
: بحيث $(v \neq 0) \xrightarrow{u \neq 0} (v \neq 0)$

نان: $\vec{v} = \vec{v}$ متعامدان. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{0}$ ناون:

خواص : ليكن \vec{u} و \vec{v} و أشعة و k عدد حقيقي .

$$\overrightarrow{u}$$
, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} , \overrightarrow{u}

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \square$$

$$\overrightarrow{u} \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \square$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v} & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \end{pmatrix}^2 = \vec{u} + \vec{v} - 2.\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u} & \overrightarrow{k} & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} & k & \overrightarrow{v} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \overrightarrow{u} & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} & \overrightarrow{v} \end{pmatrix} \square$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 \mathbf{D}$$

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

 $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس : و $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{u}(x,y,z)$ فإن

 $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

طويلة شعاع:

 $\left(o,ec{i}\;,\,ec{j}\;,ec{k}\;
ight)$ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: فإن $\vec{u}(x, y, z)$

المسافة بين نقطتين:

نإن: B(x', y', z') فإن A(x, y, z)

 $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$

معادلة سطح كرة:

لتكن (C) كرة مركزها $\omega(x_0,y_0,z_0)$ و نصف قطرها

(C₁)•____

.(r>0) حيث r

ومن أجل كل نقطة

(C) من M(x,y,z)

 $\omega M = r$: فإن

 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$: أي معادلة (C) هي

 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

• طبيعة المجموعة (C) للنقط (x, y, z) حيث:

 $x^{2} + y^{2} + z^{2} + a.x + b.y + c.z + d = 0$

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^{2} + \left(y - \frac{2}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{6}{2}\right)^{2} = 0$$

$$-(2)^{2} - (1)^{2} - (3)^{2} + 1 = 0$$

$$(x + 2)^{2} + (y - 1)^{2} + (z + 3)^{2} = 13 = 0$$
ومنه : 31 جارة عن جميع نقاط سطح كرة مركزها $c(-2,1,-3)$ ونصف قطرها $c(-2,1,-3)$

■ المستقيمات و المستويات في الفضاء:

المستقيم في الفضاء:

1) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطتين:

A(2,-2,3) مستقيم يشمل النقطتين (Δ) عثال : B(-1,2,-1) و

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (۵)

 $\overrightarrow{AM} = \lambda$. \overrightarrow{AB} : فإن (Δ) فإن M(x,y,z) فان كن النقطة M(x,y,z)

 $\lambda \in R$ حيث $(\lambda \in R)$ حيث: $(A \in R)$ حيث: $(A \in R)$ حيث: $(A \in R)$ حيث:

$$\begin{cases} x = -3.\lambda + 2 \\ y = 4.\lambda - 2 \end{cases} : \begin{cases} x - 2 = -3.\lambda \\ y + 2 = 4.\lambda \end{cases}$$

$$z = -4.\lambda + 3$$

$$\begin{cases} z - 3 = -4.\lambda \\ z - 3 = -4.\lambda \end{cases}$$

2) النمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطة ويوازي شعاع غير معدوم :

مثال : (Δ) مستقيم يشمل النقطة (5,-2,1) ويوازي $\overrightarrow{u}(1,3,4)$ الشعاع (1,3,4)

 (Δ) الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم

الذي يشمل النقطة A ويوازي الشعاع \overrightarrow{u}

 $\overrightarrow{AM} = \lambda . \overrightarrow{u} :$ نان (Δ) نان (M(x, y, z) نان ($\lambda \in R$) نان ($\lambda \in R$) حيث

 $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^{2}$ $- \left(\frac{b}{2}\right)^{2} - \left(\frac{e}{2}\right)^{2} + d = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} : \omega,$ $= \left(\frac{a}{2}\right)^{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^{2} + \left(\frac{e}{2}\right)^{2} - d$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^{2} + \left(z + \frac{e}{2}\right)^{2} : \omega,$ $= \frac{a^{2} + b^{2} + c^{2} - 4d}{4}$ $: \omega \left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} : \omega,$ $= \frac{a^{2} + b^{2} + c^{2} - 4d}{4}$ $: \omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{e}{2}\right) = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} : \omega,$ $= \frac{a^{2} + b^{2} + c^{2} - 4d}{4}$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} = 0$ $\left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)^{2} =$

 $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}}$ ونصف قطرها $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ ونصف قطرها $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ مي نقطة $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ هي نقطة $\omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ اذا کان : ((2) مال مي نقطة (C) نان : (2) مال مي نقطة (C) نان : (3) مال مي نقطة (C) مي نقطة (C)

إذا كان : $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ فإن $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ هي مجموعة خالية .

William Company of the State of

ما طبيعة مجموعة النقط M(x, y, z) التي تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 + 4.x - 2.y + 6.z + 1 = 0$

mistle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4.x - 2.y + 6.z + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \lambda + 5 \\ y = 3.\lambda - 2 : \text{if} \end{cases} \begin{cases} x - 5 = \lambda \\ y + 2 = 3.\lambda : \\ z - 1 = 4.\lambda \end{cases}$$

ملاحظة: كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له. ✓ المستوى في الفضاء:

1) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة:

B(2,1,1) و A(0,1,-1) مستو يشمل النقط (P) مستو يشمل النقط C(5,0,3)

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستويشمل ثلاث نقط A, B, C ليست على إستقامية.

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

 $\overrightarrow{AB} = \lambda . \overrightarrow{AC}$: نثبت أنه لا يوجد عدد حقيقي λ حيث \overrightarrow{AC} (5;-1;4) نثبت أنه لا يوجد عدد حقيقي لله ينا: \overrightarrow{AC} (5;-1;4) و

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{5} \\ \lambda = 0 : \omega \end{cases} \begin{cases} 2 = 5.\lambda \\ 0 = -\lambda : \omega \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

مستحيل، ومنه النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة.

ومنه
$$(P)$$
 أساس للمستوي (P) . $(AB;AC)$ الماس للمستوي (P) . (P) فإن (P) فإن (P) فإن (P) ومنه (P) أساس للمستوي (P) أساس للمستوي

demonstrated between the contraction of

 $(\beta \in R)$ $\alpha \in R$ (حیث) $AM = \alpha$, $AB + \beta$, AC

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y = -\beta + 1 \end{cases}$$

$$z = 2\alpha + 4\beta - 1$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y - 1 = 0.\alpha - \beta \end{cases}$$

$$z + 1 = 2\alpha + 4\beta$$

2) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل نقطة وشعاعان بشكلان أساسا له:

(u; v) مستو يشمل النقط A(2,1,-3) و (P) مستو يشمل النقط (P) على مثال: (P) مثال:

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل النقطة

و $\begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ u & v \end{pmatrix}$ أساسا له A

 $AM = \alpha.u + \beta.v$ نانقطة (P) من M(x, y, z) نانقطة ($\beta \in R$ و $\alpha \in R$)

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta + 2 \\ y = 2.\beta + 1 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 = \alpha - \beta \\ y - 1 = 0.\alpha + 2.\beta \end{cases}$$

$$z = 2\alpha + 3\beta - 3$$

$$\begin{cases} x - 2 = \alpha - \beta \\ y - 1 = 0.\alpha + 2.\beta \end{cases}$$

3) المعادلة الديكارتية لمستو:

 المعادلة الديكارتية لمستو يشمل نقطة ويعامد شعاع غير معدوم:

مثال : (P) مستويشمل النقط (3,2,-10) ويعامد الشعاع (1;-5;7) .

الهدف من هذا المثال تعيين معادلة ديكارتية لمستو يشمل النقطة A ويعامد الشعاع \overrightarrow{u} .

 \overrightarrow{AM} . $\overrightarrow{u} = 0$: نان (P) من M(x, y, z) فإن \overrightarrow{AM} (x - 3; y - 2; z + 10) ولدينا: (x - 3) - 5. (y - 2) + 7. (z + 10) = 0 ومنه : (x - 3) + 7 ومنه : (x - 5) + 7

• المعادلة الديكارتية لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على إستقامية:

.C(0;1;2)، B(2;-4;0)، A(1;1;3) ليست على استقامة واحدة: C ، B ، A

مي (1;-5;-3) م AC(-1;0;-1) ولدينا: معناه AB و AC غیر مرتبطان خطیا و منه 0ر-النقط C ، B ، A ليست على استقامة واحدة ومنه النقط (ABC) او (P)او (ABC)تمين معادلة ديكارتية للمستوي (P): (نبحث عن شعاعا $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ نفرض أن الشعاع (P) شعاع $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0$ ناظمي للمستوي (P)فإن $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n}=0$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=0$ $\begin{cases} a - 5b - 3c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}$ $b=rac{4}{5}$ نفرض: a=1 ومنه فإن a=1ومنه يكون الشعاع $n\left(1;-1;\frac{4}{5}\right)$ شعاعا ناظميا $\vec{n}=5$. $\vec{n}:$ النستوى (P) ونلاحظ أيضاً أن الشعاع شعاعا ناظمیا للمستوی (P) لأن \vec{n} و \vec{n} مرتبطان خطیا. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$ نان: (P) ناملة من M(x; y; z) نكن n'(5;-5;4) $\int AM(x-1;y-1;z-3)$ (x-1)(5)+(y-1)(-5)+(z-3)(4)=0أي: 0 = 21 - 4z + 4z - 5x معادلة (P) الديكارتية.

الشعاع العمودي لمستو يسمى شعاع ناظمي له .

كل مستوله معادلة ديكارتية من الشكل

u(a;b;c) و a.x+b.y+c.z+d=0

z=0 : المستوي $(o; \vec{i}; \vec{j})$ معادلته من الشكل

x=0 : المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ معادلته من الشكل

y=0: المسنوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ معادلته من الشكل

 الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى الثمثيل الوسيطي له والعكس:

 $y = -\alpha + 3\beta + 2$ مستو تمثيله الوسيطي له: مثال : (P) مستو تمثيله الوسيطي $\beta + 2$

 (P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل : a.x + b.y + c.z + d = 0نفرض ثلاث نقط C ، B ، A من (P) ليست على استقامة واحدة فيكون (P) أساس للمستوي (P). : نانقطة M(x, y, z) نان نانقطة لتكن النقطة

 $(\beta \in R)$ $\alpha \in R$: حیث $AM = \alpha$. $AB + \beta$. ACx+y-z+1=0: مثال مستو معادلته الديكارتية الهدف هو إعطاء تمثيلا وسيطيا للمستوي (P). لدينا: النقط C ، B ، A من (P) حيث: C(-1;0;0), B(0;-1;0), A(0;0;1)

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة.

لدينا: (0;-1;-1) م AB (0;-1;-1 لدينا ومنه النقط A,B,C ليست على استقامة $\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ واحدة.

(P) ومنه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ اساس للمستوي لتكن النقطة (P) من M(x, y, z) فإن:

 $(\beta \in R, \alpha \in R)$ (حیث $AM = \alpha \cdot AB + \beta \cdot AC$ $x = 0.\alpha - 1.\beta$ $\begin{cases} y = -1.\alpha + 0.\beta & \vdots \\ y = -1.\alpha + 0.\beta & \vdots \end{cases}$ $z-1=-1.\alpha-1.\beta$ $\int x = -\beta$

$$\begin{cases} x = -\beta \\ y = -\alpha \\ z = -\alpha - \beta + 1 \end{cases}$$

الانتقال من التمثيل الوسيطي لمستو إلى المعادلة الديكارتية له:

 $\int x = 2\alpha + \beta - 1$

 $z = \alpha - \beta$

 $\beta \in R$ و $\alpha \in R$ حيث $\beta \in R$

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t \end{cases}$$

$$z = -2t + 1$$

$$\begin{cases} \lambda + 1 = -t + 2 \\ -\lambda = 3t \end{cases}$$
 : نحصل على $\lambda + 3 = -2t + 1$

$$\begin{cases} \lambda + t - 1 = 0....(1) \\ 3t + \lambda = 0.....(2) \\ 2\lambda + 2t + 2 = 0....(3) \end{cases}$$

$$t = \frac{-1}{2}$$
 من (2): $\lambda = -3t$ نعوض في (1) و (3) نجد $\lambda = -3t$

مستحيل ومنه (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2) الوضع النسبي لمستويين:

في الفضاء يكون المستويان (P) و (P') إما : متوازيان (غير متطابقان أو متطابقان) ـ متقاطعان في مستقيم .

x - y + z - 1 = 0: مثال: (P) مستو معادلته

2x-2y+2z-5=0 : مستو معادلته (P') مستو

(P) لدينا : n(1;-1;1) شعاع ناظمي لـ

(P') و (2;-2;2) شعاع ناظمي ل

 $\overrightarrow{n'} = 2.\overrightarrow{n}$: لاحظ أن \overrightarrow{n} و \overrightarrow{n} مرتبطان خطيا لأن

ومنه : (P') و (P') متوازیان .

x-y+z-1=0 : مثال: (P) مستو معادلته

2x-3y+z-5=0: مستو معادلته (P')

 $\vec{n}'(2;-3;1)$ و (P) لدينا : $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي له (P)

(P') لظمي ل

v(1;3;-1) و u(2;-1;1) اساسا له v(1;3;-1) و u(2;-1;1) اساسا له A(-1,2,0) و را

 $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}=0:$ يكن (P) ناظم له $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ ناظم له $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ ليكن $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}=0$

c=1: نفرض $\begin{cases} 2a-b+c=0 \\ a+3b-c=0 \end{cases}$

b = 2a + 1 : (1) من $\begin{cases} 2a - b + 1 = 0....(1) \\ a + 3b - 1 = 0....(2) \end{cases}$

a+3(2a+1)-1=0 : نعوض في (2) نحصل على

 $b = -\frac{3}{7}$, $a = -\frac{2}{7}$:

فيكون لدينا شعاعا ناظها للمستوي (P) الذي يشمل النقطة (A(-1,2,0)

وهكذا نكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P).

√ الأوضاع النسبية لمستقيات ومستويات في الفضاء:

1) الوضع النسبي لمستقيمين:

في الفضاء يكون المستقيهان (Δ) و (Δ') إما :

متوازیان (غیر متطابقان أو متطابقان) ـ متقاطعان ـ لیسا من نفس المستوی

مثال: (Δ) و (Δ) مستقيمان تمثيلهما الوسيطي:

$$(t \in R) \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t \\ z = -2t + 1 \end{cases} , (\lambda \in R) \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

 $\overrightarrow{v}(-1;3;-2)$ و (Δ) شعاع توجيه (Δ) و (1;-1;2) لدينا : (Δ')

 $\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{3}$ و لدينا: \overrightarrow{v} غير مرتبطان خطيا لأن: \overrightarrow{v} و لدينا: \overrightarrow{v} غير متوازيان (Δ) غير متوازيان

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \end{cases}$$
 نعوض قیم x و y و z من $z = 2\lambda + 3$

الهندست الفضائية

ملاحظات:

(P) انت نقطتان من مستقيم
$$(\Delta)$$
 تنتميان لمستو (P) فإن $(\Delta) \subset (P)$.

نفرض
$$\overrightarrow{u}$$
 شعاعا ناظمیا للمستوی (P) و \overrightarrow{u} شعاع توجیه للمستقیم (Δ) :

$$(P)$$
 يوازي (Δ) متعامدان فإن U يوازي n يوازي إذا كان

$$(P)$$
 متوازیان فإن (Δ) یعامد $\stackrel{
ightarrow}{U}$ بنامد $\stackrel{
ightarrow}{n}$

المسافة بين نقطة ومستوي :

: نان
$$A(x_A, y_A, z_A)$$
 وان $a.x + b.y + c.z + d = 0$

$$d((P),A) = \frac{|a.x_A + b.y_B + c.z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

 $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$: أو \vec{n} غير مرتبطان خطيا لأن \vec{n} أن غير مرتبطان خطيا \cdot (Δ) و (P') متقاطعان في مستقيم (P') و روز (P) $z = \lambda$: نضع $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ نضع $x = y - \lambda + 1$: (1) in ومنه: $x = -2\lambda + 3$: نبوض ني (2) نجد $y = -\lambda + 2$ ومنه $\int x = -2\lambda + 3$ $(\Delta): \left\{ y = -\lambda + 2 \right\}$ ومنه التمثيل الوسيطي ل $\lambda \in R$ حيث

3) الوضع النسبي لمستقيم و مستوي:

ف الفضاء يكون المستوي (P) والمستقيم (Δ)

اما: متوازیان ـ (Δ) محتوی فی (P) ـ (P) و (Δ) متقاطعان في نقطة .

تمارين

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

 $(D)^{(1)}$ و(T) مستقيهان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$t \in IR \quad \text{if } \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + 4k \end{cases} = \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

بین ان (D) و (T) متوازیان.

 $(T)_{e}(D)^{(2)}$ مستقيان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$t \in IR \quad \text{one} \quad \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + l \\ y = 1 \end{cases} \\ z = 5 + 3k \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + l \\ y = 1 \end{cases} \\ k \in IR \end{cases}$$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$$t \in IR$$
 حيث
$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \end{cases}$$
 و
$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

$$z = -1 + 4k$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

$$z = 1 + t$$

$$k \in IR$$
 و (T) متقاطعان.

حل التمرين 01:

(D) شعاع توجيه المستقيم (
$$\vec{u}$$
) (1

(T) شعاع توجیه المستقیم
$$\vec{v} \left(\frac{4^2}{4} \right)$$

معناه (١) و(٢) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$1=1+k$$
:نصع: $2-t=1-k$ من المعادلة 2 لدينا $2-t=1-k$ نصع: $1+t=-1+4k$

ثم نعوض 1 في كل من المعادلات 1 و 3 نحصل على:

$$t = 2: 0$$

$$\begin{cases}
1 = k \\
1 = k
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
-3 + 2(1 + k) = k \\
1 + 1 + k = -1 + 4k
\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$
 من أجل ا = $k = 1$ نحصل على $k = 1$ من أجل ا = $k = 1 + 4 = 3$

أو من أجل 2 = 1 نحصل على: 1 = 2 (2) = 1

$$y = 2 - 2 = 0$$

 $z = 1 + 2 = 3$

A(1;0;3) نستنتج أن: (D) و (T) يتقاطعان في النقطة

التمرين 02:

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

(D):
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \text{ } 3 \text{ } (P) : -2x + y - z + 3 = 0 \text{ } (1) \\ z = 2 + t \end{cases}$$

(D):
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \quad (P): x + 3y - z + 1 = 0 \quad (2)$$

$$z = 2$$

(D):
$$\begin{cases} x = 5+t \\ y = 1+t \\ z = 4+t \end{cases}$$
 (P): $x + y - 2z + 2 = 0$ (3)

$$\|\mathbf{L}_{ij}\|_{1}^{2} = \left[-\frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1}(i), i \in [i] \text{ as all yield.}\right]$$

ومله المستقيان (1) و (٢) متوازيان.

(T)
$$i = i$$
 and $i = i$ $i = 1$ i

لدينا: 2 م / إلان: أن و أد ليسا متوازيان.

وهنه: (D) و (T) ليسا متوازيان.

معناه (11) و ('7) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 + 3k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 + i \\ y = i \end{cases}$$
 (by a)

نبحث عن نقطة تقاطع المستقيان إن وجدت:

$$\begin{cases} -3+1 = -1+k \\ 1 = 2-2k \\ 1+3i = 5+3k \end{cases}$$

نعوض 1 من المعادلة 2 في كل من المعادلات 1 و 3

المحصل على:

$$\begin{cases} 0 = 3k \\ 2 = 9k \end{cases} \begin{cases} -3 + 2 - 2k = -1 + k \\ 1 + 3(2 - 2k) = 5 + 3k \end{cases}$$

$$0 = k$$
ومنه $\begin{cases} 0 = k \\ 2 \\ 9 = k \end{cases}$

نستنتج أن: (D) و (T) لا يتقاطعان ومنه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدینا: $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{1}$ إذن: \bar{n} و \bar{n} لیسا متوازیان. ومنه: (D) و (T) لیسا متوازیان.

التمرين 03:

نعتبر المستقيمات الثلاثة (D3); (D2); حيث:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 (D3)

$$\begin{cases} x = 5 - 4t' \\ y = -2t' \quad ; t' \in R \end{cases}$$
 (D2)
$$z = -1 + 2t'$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases} ; t \in R \quad (D1)$$
$$z = 1 - t$$

 (D_3) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم أ

. بين أن المستقيمين (D_1) و (D_2) متطابقان (2

ك بين أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوى.

(4) (Δ) مستقيم يمر من النقطة 4 , 1- , 5) ه و شعاع (Δ)

 \vec{u} (D_1) توجيهه \vec{u} (\vec{u} (\vec{u} (\vec{u} (\vec{u} (\vec{u}) و (\vec{u}) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

حل التمرين 03 :

: (D_3) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (1

 $z = z \cdot z$ نکتب x و y بدلالهٔ z

$$\begin{cases} x - y = 2z \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 و منه :
$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
 : الدينا

$$\begin{cases} 3x - 3y = 6z \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$
: e also is

 $x = \frac{6}{5}z$ و منه : 5x = 6z و منه : 5x = 6z

: نجد x - y = 2z نجد نجد

$$y = x - 2z = \frac{6}{5}z - 2z = -\frac{4}{5}z$$

حل النمرين 02 :

نعوض ٢، ٧، ت في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط 1 ثم نبحث عن إحداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت.

أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي 1 فإن المستقيم (D) :

$$\begin{cases}
-2x + y - z + 3 = 0 \\
x = t
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
y = -1 + 3t \\
z = 2 + t
\end{cases}$$

-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0 ومنه: -2t-1+3t-2-t+3=0

أي: 0=0 دائها محققة

(P) نستنتج أن: (D) محتوى في المستوي

$$(D)\cap (P)=(D)$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 & (2 \\ x = 1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

1+3t+3(-2-2t)-2+1=0:

$$1+3t-6-6t-1=0$$

$$-3t = 6$$

$$t = -2$$

$$(D): \begin{cases} x = 1+3(-2) = -5 \\ y = -2-2(-2) = 2 \end{cases}$$

$$z = 2$$

$$(D) \cap (P) = \{A(-5;2;2)\}$$
 نستنتج آن: $\{x + y - 2z + 2 = 0\}$

$$\begin{cases} x + y - 2t \\ x = 5 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 + t \end{cases}$$
(3)

$$z=4+t$$

$$5+t+1+t-2(4+t)+2=0$$

أي: 6 = 0 : 6 + 2t - 8 - 2t + 8 = 0 مستحيل

$$(D)\cap (P)=\phi$$
: it is intitized for $(D)\cap (P)=\phi$

 $\lambda \in \mathbb{R}$: هو (D_3) إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم

$$(D_3): \begin{cases} x = \frac{6}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

 (D_1) و (D_2) متطابقان: $n_1(2,1,-1)$ و (D_1) متطابقان: $n_1(2,1,-1)$ هو (D_1) هو (D_2) هو $n_2(-4,-2,2)$ و شعاع نوجیه المستقیم (D_2) هو (D_2) هو (D_1) نلاحظ أن: $n_2=-2n_1$ و علیه فإن المستقیمین (D_2) و (D_2) متوازیان.

من جهة أخرى النقطة 1 , 2 - , 1) تسمي إلى (D_1) من جهة أخرى النقطة 1 = 0 من أجل 1 = 0 و 1 = 0 من أجل 1 = 0 و بالتالي المستقيمين 1 = 0 و 1 = 0 متوازيان و لهما نقطة مشتركة و بالتالي فإن المستقيمين 1 = 0 و 1 = 0 متطابقان. 1 = 0 و بالتالي فإن المستقيمين 1 = 0 و 1 = 0 متطابقان. 1 = 0 و بالتالي فإن المستقيمين 1 = 0 و 1 = 0 من نفس المستوي 1 = 0 المستقيمين 1 = 0 هو 1 = 0 هو 1 = 0 من نفس المستوي و شعاع توجيه المستقيم 1 = 0 هو 1 = 0 هو 1 = 0 هو 1 = 0 و شعاع توجيه المستقيم 1 = 0 هو 1 = 0 هو 1 = 0 و شعاع توجيه المستقيم 1 = 0 هو 1 = 0 هو أنهما إما متقاطعان أو ليس من نفس فيس المستوى .

 $:(D_3)$ و (D_1) دراسة تقاطع المستقيمين

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda - 2t = 1....(1) \\ -\frac{4}{5}\lambda - t = -2....(2) : \frac{4}{5}\lambda = 1 + 2t \\ -\frac{4}{5}\lambda = -2 + t; t \in \mathbb{R} \\ \lambda + t = 1....(3) \end{cases}$$

$$\frac{1}{5}\lambda = -1$$
: من (2) و (3) نجد $\lambda = -1$ من (2) و (3) نجد $\lambda = -1$ و منه $\lambda = -5$ و منه $\lambda = -5$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: 1 ≠ 18 - = 12 - 6 - = 6 × 2 - (5 -) 5 بما أن الجملة ليست فما حل و بالثاني فإن المستقيمين (م)

يها أن الجملة ليست لها حل و بالتاني فابن المستفيدين ([0] و ([0]) غير متقاطعان يغني أنهما ليس من نفس المستوي (4) إثبات أن المستفيدين ([0]) و ((4)) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيينها :

النمثيل الوسيطى للمستقيم (۵):

رما أن للمستقيم (۵) يعر من النقطقة . ۱ - , 3 (A) ما أن للمستقيم $\vec{u}(x,y,z)$ و شعاع توجيه، $\vec{u}(3,1,1)$ و لتكن

 $\overline{AM} = \alpha. \overrightarrow{u}$ نقطة من Δ معناء $\overline{AM}(x-5; y+1; z-4)$ لدينا

$$\begin{cases} x-5=3\alpha \\ y+1=\alpha \ ; \alpha \in R : 0 \end{cases}$$

$$z-4=\alpha$$

$$\begin{cases} x=3\alpha+5 \\ y=\alpha-1 \ ; \alpha \in R : 0 \end{cases}$$

$$z=\alpha+4$$

إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان : لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هـ و (2,1,-1) و شعاع توجيه المستقيم (Δ) هـ و (3,1,1) .

 $(\Delta)_{1}$ نلاحظ أن : $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$ و عليه فإن المستقيمين (D_{1}) و أن نفس غير متوازيانو بالتالي هما إما متقاطعان أو ليس من نفس

 (Δ) و (D_1) دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و

$$(\Delta) \ color (D_1) \ color (D_2) \ color (D_3) \ color (D_4) \ color (D$$

 $AC = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ $S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{21.\sqrt{6}}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2} (c_2)$

: ABC عميين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث (4 (A,1); (B,1); (C,1)} مرجح الجملة ((A,1) $D\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{0+2+1}{3}, \frac{-1+3-2}{3}\right)$: وعليه فإن D(2,1,0)

D(1;1;-2), C(0;-2;3), B(-1;2;4), A(2;1;-1)x-2y+z+1=0: الذي معادلته (P) الذي أجب بصح أوخطأ معاللا إجابتك على كل سؤال من الأسئلة

- النقط C; B; A تعين مستويا وحيدا.
- (P) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P).
- 3) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD) هي: x + 8y - z - 11 = 0

 $(k \in R)$ التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) هو: (4 x = 2ky = 2 + 3kz=3-4k

 $\frac{\sqrt{0}}{3}$ سطح الكرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{0}}{3}$ (P) ماسه للمستوي

حل التمرين 05:

 \overrightarrow{AC} (-2;-3;4) ، \overrightarrow{AB} (-3;1;5) الدينا (1

و $\frac{-3}{2} \neq \frac{1}{2}$ ومنه $\frac{-3}{AB}$ و $\frac{-3}{2} \neq \frac{1}{2}$

 $\alpha = -2$: $\alpha = -4$: $\alpha = -2$ (2) $\alpha = -4$ وعليه فإن: 3 = -1 + 2 - و منه : 1 = -1 بالتعويض في المعادلة (1) نجد: ١- = - 6 - أي ان $\alpha = -1$ و $\alpha = -2$ و ا $\alpha = -1$ و ا و بالتالي فإن المستقيمين (D_{i}) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة هي :

 $\alpha = -2$: $\begin{cases} x = 3(-2) + 5 = -1 \\ y = -2 - 1 = -3 \end{cases}$ من أجل z = -2 + 4 = 2 $(D_1) \cap (\Delta) = \{(-1, -3, 2)\}$: إذَن

نعتر النقط (1,0,-1) ، B(2,2,3) ، A(1,0,-1) نعتر النقط

- 1) تحقق أن النقط A ، B ، A ليست على استقامة واحدة .
 - 2) أثبت أن المثلث ABC قائم.
 - 3) أحسب مساحة المثلث ABC (3
 - . ABC عين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث (4

حل التمريين 04 :

1) التحقق أن النقط A ، A ، B ، A الستقامة واحدة :

 $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$

 $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$ نلاحظ أن خطيا لأن: \overrightarrow{AC} غير مرتبطان خطيا لأن: \overrightarrow{AB} نلاحظ ومنه النقط C ، B ، A ليست على استقامة واحدة .

2) أثبات أن المثلث ABC قائم:

لدينا: (1,2,4) AB و (1,2,4)

 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times (-1) = 0$

ومنه المثلث ABC قائم في A.

 $ABC: S = \frac{1}{2}. \overrightarrow{AB}. \overrightarrow{AC}$ عساجة المثلث (3

81 $AB = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$

 $d((P);D) = \frac{1-2(1)+(-2)+1}{1^2+(-2)^2+(1)^2}$ (5) = $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

أي: d((P); D) يساوي نصف قطر الكرة وعليه الإجابة (صحيحة) .

التمرين 06:

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس $(o;\vec{i}\;;\vec{j}\;;\vec{k}\;)$. D(0;0;1), C(1;4;0), B(2;0;-1), $A(\lambda;2;3)$ نعتبر النقط λ الجداءات السلمية التالية :

. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ABC) عين قيمة العدد الحقيقي λ كي يكون المثلث C قائم في C .

. $\lambda = -4$ في ما يأتي نأخذ

أ) بين أن النقط D, C, B, A لا تنتمي إلى نفس المستوي .

: عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة G عين إحداثيات النقطة G (G م)

 $\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$

ج) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي \overrightarrow{S} عين المجموعة (\overrightarrow{S} $\overrightarrow{$

حل التمرين 06:

 $\overrightarrow{AB}(2-\lambda;-2;-4), \overrightarrow{AC}(1-\lambda;2;-3), \overrightarrow{BC}(-1;4;1)$ (1 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda$) $\lambda^2 - 3\lambda + 10$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda + 4$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$) $\overrightarrow{AC} = 0$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC$

D(0;0;1), C(1;4;0), B(2;0;-1), A(4;2;3) / (3 $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2), \overrightarrow{AC}(5;2;-3), \overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$ ومنه النقط C; B; A ليست على استقامة واحدة وعليه النقط C; B; A تشكل مستو وحيد وعليه فإن الإجابة (صحيحة).

(2) نعوض إحداثيات $A \in (P)$ في معادلة (P) نجد : $A \in (P)$ ومنه (P) + (-1) + 1 = 0

0 - 2(-2) + 3 + 1 = 0

 $C \notin (P)$ ومنه $8 \neq 0$

بها أن $A \in (P)$ و $A \in (P)$ فإن المستقيم $A \in (P)$ غير عتوى في $A \in (P)$ وعليه فإن الإجابة (خاطئة) .

3) نتحقق أن النقط (ABD) تشكل مستو وحيد:

 $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ لدينا:

و منه النقط D; B; A تعین مستو و حید . $\frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{-1}$

نعوض إحداثيات D;B;A في المعادلة الديكارتية :

x + 8y - z - 11 = 0

نجد 0 = 11 - (1 -) - (0 + 2 + 8 وعليه إحداثيات A تحقق المعادلة:

. 0 = 0 أي 1 + 8(2) - 4 - 11 = 0

وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

0 = 0 أي 1 + 8(1) - (-2) - 11 = 0

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة

وعليه فإن الإجابة (صحيحة)

4) نعوض إحداثيات A في التمثيل الوسيطي نجد:

 $\begin{cases} 2 = 2k & ; & k = 1 \\ 1 = 2 + 3k & ; & k = -\frac{1}{3} \\ -1 = 3 - 4k & ; & k = 1 \end{cases}$

ومنه إحداثيات A لاتحقق التمثيل الوسيطي وعليه فإن الإجابة (خاطئة).

D, C, B, A من نفس المستوي إذا كانت $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي أي إذا وجد الأشعة علمين حقيقيين .

علدين حقيقين .
$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} : \alpha, \beta$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 5\beta = 4 & (1) \\ -2\alpha + 2\beta = -2 & (2) * : \alpha, \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\alpha - 3\beta = -2 & (3) \end{cases}$$

$$x_{G} = \frac{2x_{A} + x_{B} - 2x_{C}}{2 + 1 - 2} = -8 : 0.65$$

$$y_{G} = \frac{2x_{A} + x_{B} - 2x_{C}}{2 + 1 - 2} = -4 ,$$

$$z_{G} = \frac{2z_{A} + z_{B} - 2z_{C}}{2 + 1 - 2} = 5$$

ومنه إحداثيات النقطة (-8;-4;5)

 $\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$ هرجح الجملة G مرجح الجملة $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}:$ فإنها تحقق العلاقة $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ $\overrightarrow{MD}=0$

$$\left(2\left(\overrightarrow{MG}+GA\right)+\left(\overrightarrow{MG}+GB\right)-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$

$$\left(2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{MD} = 0$$

 $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ (iii)

أي مجموعة النقط M من الفضاء هي جميع نقاط سطح الكرة التي قطرها [GD].

:(E) نعين معادلة ديكارتية للمجموعة

(E): $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$ is that M(x; y; z) is salt M(x; y; z) is salt M(x; y; z).

(x): $M\overrightarrow{D}(x; y; z-1)$, $M\overrightarrow{G}(x+8; y+4; z-5)$:
(x+8).(x)+(y+4).(y)+(z-5).(z-1)=0: [s]

(x+4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 24
(x+4)² + (y+2)² + (z-3)² = 24:

السرين 07.

 $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (S) الذي مركزه o(1;2;-1) اكتب معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه A(2;0;3) .

A أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (S) في (S)

(3) أثبت أن المستوي (π) الذي معادلته

x + 2y + 2z + 15 = 0(S') يمس السطح الكروي (S') ذو المعدلة

ين إحداثيات نقطة التاس. $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

حل التمرين 07 :

الكرة التي مركزها ω وتشمل النقطة A يكون نصف ωA قطرها ωA

$$\omega A = \sqrt{(x_A - x_{\omega})^2 + (y_A - y_{\omega})^2 + (z_A - z_{\omega})}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

R نعلم أن معادلة الكرة (S) التي مركزها ω ونصف قطرها $(x-x_{\omega})^{2}+(y-y_{\omega})^{2}+(z-z_{\omega})^{2}=R^{2}$ هي $(x-x_{\omega})^{2}+(y-y_{\omega})^{2}+(z-z_{\omega})^{2}=R^{2}$ إذن معادلة الكرة (S) هي :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 21$$

. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 15 = 0$: ومنه

ك) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة A يعني (2)

 $\overrightarrow{\omega A} \perp (P)$

$$\begin{cases} x = \lambda & \text{and} \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ \lambda + 2\lambda + 2\lambda + 15 = 0 \end{cases}$$

من الجملة (*)نستنتج $\frac{5}{3}$ = λ وبتعويض λ في المعادلار للتمثيل الوسيطى لـ (OH) نجد :

$$H\left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right)$$
: $x = -\frac{5}{3}$, $y = -\frac{10}{3}$, $z = -\frac{10}{3}$

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر

الحريز 90

 $\omega(2;1;0)$ ، B(1;0;0) ، A(-1;2;-1) النقاط $\omega(2;1;0)$ ، B(1;0;0) ، A(-1;2;-1) . (AB ω) . (AB ω) . (2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (AB ω) . (3) نعتبر في الفضاء (E) الكرة (S) المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$. (AB ω) وحدد مركزها . (- عين نصف قطر الكرة (S) وحدد مركزها . (AB ω) . وحدد مركزها . (AB ω) . والمستوي (AB ω) . وقطتين ج- بين أن المستقيم (AB ω) يقطع الكرة (S) في نقطتين إحداثياتها .

حل التمرين 08:

تشكل مستوي (ABW)

(AB) نقطة من المستقيم (AB) AB(2;-2;1) نقطة من المستقيم (AB(2;-2;1) معناه يوجد عدد حقيقي AB(2;-2;1) بحيث AB(2;-2;1) معناه يوجد عدد حقيقي AB(2;-2;1) ومنه: AB(2;-2;1) وهو التمثيل الوسيطي له (AB(2;-2;1) النقاط AB(2;-2;1) ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين AB(2;-2;1) غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهي الشعاعين AB(2;-2;1)

 $| (4) \cdot (2) \cdot (3) | (4) \cdot (2) \cdot (4) | (4) \cdot (2) \cdot (4) | (4) \cdot (4) \cdot (4) | (4) \cdot (4) \cdot (4) | (4) \cdot (4) \cdot (4) \cdot (4) | (4) \cdot (4)$

 $I(O;(P)) = \frac{|0 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + 15|}{|1|^2 + 2|^2 + 2|^2} = \frac{5}{3}$ $\int_{A}^{1} (P) + 2|^2 + 2|^2 + 2|^3$ $\int_{A}^{1} (P) \int_{A}^{1} (P$

$$(OH) \cap (x) = \{H\}, \lambda \in \mathbb{R}, y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ z = 2\lambda \\ z + 2y + 2z + 15 = 0$$

الشعاع \vec{n} ناظمي للمستوي $(AB\omega)$ هو الشعاع الذي $\vec{n}(a;b;c)$ $\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$ هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين \overrightarrow{AB} و $\overrightarrow{B\omega}$ أي $\overrightarrow{B\omega}$ منه $\overrightarrow{B\omega}$ = 0 هو الشعاع الذي $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{B\omega}$ = 0 هو الشعاع الذي الذي الشعاع الشعاع الذي الشعاع الشعاع الذي الشعاء الذي الشعاع الذي الشعاء الشعاع الذي الشعاع الذي الشعاع الذي الشعاع الذي الشعاء الشعاع الشعاء المساع الشعاء المساع ا

$$b = -1 \ c = -4 \ \text{if} \ a = 1 \ \text{if} \ a = 2a - 2b + c = 0$$

$$a + b = 0$$

ومنه $(AB\omega)$ وتكون معادلة المستوي $\vec{n}(1;-1;-4)$ ومنه $\vec{n}(1;-1;-4)$ من الشكل $\vec{n}(1;-1;-4)$ عنه $\vec{n}(1;0;0)$ من الشكل $\vec{n}(1;0;0)$ غان $\vec{n}(1;0;0)$ غان $\vec{n}(1;0;0)$ غان $\vec{n}(1;0;0)$ غان $\vec{n}(1;0;0)$ غان $\vec{n}(1;0;0)$ هي: $(AB\omega)$ هي: $(AB\omega)$ عنه المتوي $(AB\omega)$ هي: $(AB\omega)$ عنه المعادلة المستوي $(AB\omega)$ هي: $(AB\omega)$ عنه $(AB\omega)$ ومنه $(AB\omega)$ عنه $(AB\omega)$ ومنه $(AB\omega)$ ومنه $(AB\omega)$ ونصف قطرها $(AB\omega)$ غان $(AB\omega)$ غان $(AB\omega)$ عنه الكرة $(AB\omega)$ والمستوي $(AB\omega)$ يتقاطعان حسب الكرة $(AB\omega)$ والمستوي $(AB\omega)$ يتقاطعان حسب الدائرة الكبيرة في الكرة أي الدائرة التي مركزها هي ونصف

: يعني (AB) \cap (S) (ج

 $\sqrt{6}$ قطرها

$$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 & (1) \\ y = -2\lambda + 2 & (2) \\ z = \lambda - 1 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$= \lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, x = 2\lambda - 1, y = -2\lambda + 2, y = -2\lambda + 2,$$

 $z=\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و $x=2\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و أي المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد :

إذن
$$\lambda_2=\frac{1}{3}$$
 ومنه: $\frac{5}{3}=3$ ومنه: $\lambda_1=\frac{5}{3}$ ومنه: $\lambda_2=0$ إذن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين:

$$F\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$
 , $E\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

 λ يتم حسابهما بتعويض F:E يتم حسابهما بتعويض بالقيمتين λ و λ في التمثيل الوسيطي للمستقيم λ).

النمرين 09

الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس x=1. $(o:\vec{i}:\vec{j}:\vec{k})$ الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس x=2-t y=2-3t $t\in R$: y=2-3t $t\in R$ المستقيم z=1+t

ولتكن النقطة (A(3;-2;1) .

(1) أو جد معادلة المستوي P العمودي على D والذي يشمل النقطة A .

D أحسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي لـ A على A أحسب المسافة بين A و A .

حل التمرين 09:

 $\vec{n}(-1;3;1)$ لدينا $\vec{n}(-1;3;1)$ شعاع توجيه لـ $\vec{n}(-1;3;1)$ لدينا $\vec{n}(x,y,z)$ نقاط من $\vec{n}(x,y,z)$ ومنه:معادلة $\vec{n}(x,z)$

$$-(x-3)-3(y+2)+(z-1)=0$$
$$x+3y-z+4=0$$

P النقطة H هي تقاطع المستقيم D مع المستوي D لنبحث عن قيم t التي تجعل النقطة M من المستقيم D تنتمي للمستوي D أي تحق الشرط (المعادلة) D وحلها D = D وحلها

H(1;-1;2) المسافة بين A و منه إحداثيات النقطة H هي (1;-1;2) المسافة بين A و (1;-1;2) المسافة بين (1;-1;2) هي الطول (1;-1;2) وحيث أن (1;-1;2)

$$\overrightarrow{AH}(-2;1;1)$$

 $AH = \sqrt{6}$ إذن $AH^2 = (-2)^2 + 1^2 + 1^2$

التمرين 10

 $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس B(1;1;0), A(-1;0;1): نعتبر النقاط: D(-1;1;2), C(0;-1;-4) D(-1;1;2), C(0;-1;-4), C(0

حل التمريين 10:

و بها أن الشعاعين AB و BC متعامدان ومنه فإن المثلث ABC قائم في النقطة B .

 $\vec{u} \cdot \vec{BC} = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0$ حيث $\vec{u} \cdot \vec{a}$ اعداد حقيقية ثابتة ولدبنا: $\vec{u}(a;b;c)$ عيث $\vec{u}(a;b;c)$

2a+b-c=0 : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ -a-2b-4c=0 : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (2a+b-c=0)

c=1 دنفرض $\begin{cases} 2a+b-c=0 \\ -a-2b-4c=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 2a+b-1=0\\ -a-2b-4=0.....(\times 2) \end{cases}$

(2) (1) (1) (2a+b-1=0....(1) (2a-4b-8=0...(2)

b=-3 طرف لطرف نجد: 0=0-3b-9=0 ومنه $\vec{u}(2;-3;1)$.

 \cdot (ABC) باستنتاج معادلة ديكارتية للمستوي

معادلة المستوي (ABC) تكون على الشكل:

a.x + b.y + c.z + d = 0

2.x-3.y+.z+d=0:

ثم بتعویض إحداثیات النقطة A(-1;0;1) في المعادلة A(-1;0;1) في المعادلة 2.x-3.y+z+d=0 نجد a=0 ومنه المعادلة الدیکارتیة للمستوی a=0

2.x - 3.y + .z + 1 = 0 (ABC)

(ABC) ج/ التحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي D

واستنتج طبيعة الرباعي ABCD :

نعوض إحداثيات النقطة D(-1;1;2) في المعادلة

2.x-3.y+.z+1=0 نحصل على: -2=0 : ومنه نجد: 2.(-1)-3.(1)+(2)+1=0

(وهذا مستحيل) ومنه النقطة D لاتنتمي إلى المستوي

وعليه نستنتج أن الرباعي ABCD رباعي وجوه.

ر حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC):

$$d((ABC), D) = \frac{|2.x_D - 3.y_D + .z_D + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (1)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

3) حساب حجم رباعي الوجوه (3

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{BA \times BC}{2} \right) \times d((ABC); D)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{6} \times \sqrt{21}}{2} \right) \frac{\sqrt{14}}{7} = 1$$

4) أ/ التحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$$2x - 5y + 2z + 3 = 0$$

: نعوض إحداثيات D;B;C في المعادلة الديكارتية

$$2x - 5y + 2z + 3 = 0$$

$$0 = 0$$
 نجد $2(-1) - 5(1) + 2(2) + 3 = 0$ نجد

2(1)-5(1)+2(0)+3=0 وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة

: أي 0=0 وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

$$0 = 0$$
 أي $2(0) - 5(-1) + 2(-4) + 3 = 0$

وعليه إحداثيات C تحقق المعادلة \cdot

(BCD) عن المستوي A عن المستوي

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

$$d((BCD), A) = \frac{|2.x_A - 5.y_A + 2.z_A + 3|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$$

النعرين 11:

 $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ الغضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس B(0;1;0) ، A(2;0;0) ، و B(0;1;0) ، D(0;0;2) ، و نعتبر النقط D(0;0;2) ، ليست في استقامية .

(ABC) جد معادلة للمستوي (ABC).

جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

. 2x+2y+z-2=0 المستوي الذي معادلته: (P) (4

. بين أن (P) و (ABC) متقاطعان

P: بين أن P يشمل P و P ماذا تستنج

غين (E) عين النقط M من الفضاء التي تحقق:

 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

حل التمرين 11:

: البات أن النقط A ، B ، A ليست على استقامة واحدة (1

 $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$ لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$

و منه الشعاعان \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB} غير مرتبطين خطيا $\frac{-2}{1}$

ومنه النقط C ، B ، A ليست على استقامة واحدة.

معادلة المستوي (ABC): ليكن (a;b;c) شعاعا

 $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n}=0$ ناظها له $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}=0$ ناظها له (ABC) ناظها له غلقه ناظها له غلقه ناظها له ناطها ناطها له ناطها ناطها له ناطها له ناطها له ناطها له ناطها ن

b=2: نفرض a=1 ومنه a=1 نفرض a=1 نفرض a=1

ومنه c=1 وعليه n(1;2;1) شعاع ناظمي لـ c=1

(ABC) من M(x; y; z) لتكن النقطة

 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{AM}(x-2; y; z)$: ij

(x-2)(1)+(y)(2)+z(1)=0

x + 2y + z - 2 = 0 (وعليه فإن:

3) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC):

 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC}$: نافقطة (BC) من المستقيم M(x;y;z) فإن لتكن النقطة

 $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$ مع $\overrightarrow{BM}(x;y-1;z)$ مع $(\lambda \in ;R)$

$$\overrightarrow{CA}(2;0;-2) \cdot \overrightarrow{BA}(2;-1;0)$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| (4;-1;-2) : 0$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$|\overrightarrow{CA}(2;0;-2) \cdot \overrightarrow{BA}(2;-1;0)$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$|\overrightarrow{CA}(2;0;-2) \cdot \overrightarrow{BA}(2;-1;0)$$

$$|\overrightarrow{CA}(2;0;-2) \cdot \overrightarrow{CA}(2;0;-2)$$

$$|\overrightarrow{CA}(2;0;-2) \cdot \overrightarrow{CA}(2;0$$

العمرين 12:

(بكلوريا علمي 2009)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i}\;;\vec{j}\;;\vec{k}\;)$. C(2;1;3) ، B(0;2;1) ، A(1;0;2) نعتبر النقط x-z+1=0 : (P) مستو معادلته من الشكل : (P) هو المستوي (ABC) . (ABC) . (ABC) . (ABC) .

أ/ تحقق أن النقطة (2;3;4) لا تنتمي إلى (ABC).
 ب/ ما طبيعة ABCD.

(ABC) و المستوي (ABC). (ABC) . (ABC) . (ABCD) .

حل التمرين 12:

رموتبطان خطیا \overrightarrow{AC} (1;1;1) میر مرتبطان خطیا \overrightarrow{AC} (1;1;1) مرتبطان خطیا \overrightarrow{AC} مرتبطان خطیا \overrightarrow{AC} معناه یوجد عدد حقیقی غیر معدوم λ حیث:

وليكن (P) المستوي المعرف بمعادلته D(1;-1;-2)

2x - y + 2z + 1 = 0 الديكارتية:

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

النقط A ، A في إستقامية .

2) (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

 (π) عمودي على المستقيم ((CD)) عمودي على المستوي (3

. H(1;1;-1) هو النقطة B على (π) هو النقطة (4

حل التمرين 13 :

نانت النقط A ، A على إستقامية واحدة فإن : C ، B ، A النقط A

 λ و \overrightarrow{AB} مرتبطان خطیا معناه یو جد عدد حقیقی \overrightarrow{AC}

 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$: حيث

 $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$: لدينا

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = \frac{5}{3} : \zeta \begin{cases} -1 = \lambda \\ -5 = -3\lambda \end{cases} : \zeta = -\lambda \end{cases}$$

ومنه: AC لا يوازي AB ومنه: (الجواب خاطئ).

: النقط D ، B ، A النقط المعادلة (2

$$25x - 6y - z - 33 = 0$$

A: 25(2) - 6(3) - (-1) - 33 = 0 من أجل النقطة

.0=0:

B: 25(1) - 6(-2) - (4) - 33 = 0

اي: 0=0.

D:25(1)-6(-1)-(-2)-33=0 من أجل النقطة 0=33-30

. \overrightarrow{AB} لايوازي \overrightarrow{AD} .

$$\begin{cases}
-1 = \lambda \times 1 ; \lambda = -1 \\
2 = \lambda \times 1 ; \lambda = 2 \\
-1 = \lambda \times 1
\end{cases}$$

$$2 \neq -1 \text{ is a position}$$

ومنه النقط A و B و C ليست على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد في الفضاء يشمل النقط A و B و C و يها أن

 $1-2+1=0:39 \ A \in (P)$

$$0-1+1=0:39 \ B \in (P)$$

ره (P) کان: C = 1 + 1 = 0 فإن: المستوي (P) هو المستوى (ABC) .

 \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{AC} = -1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 / \sim$

رمنه الثلث ABC قائم في A .

(ABC)نعوض إحداثيات D في معادلة D(2;3;4) انعوض إحداثيات D

2-4+1=0:4

. (ABC) النقطة D لا تنتمي إلى D .

ABCD فإن الرباعي (ABC) الم الرباعي D

رباعي وجوه.

$$d(D;(P)) = \frac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} / (3)$$

$$S = \frac{AB \times AC}{2}$$
, $h = \frac{\sqrt{2}}{2} / \varphi$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} (i_{x} \times i_{x} \times i_{y}) : v_{y}$$

(بگلوریا علمي 2009)

 $(o;ec{i}\,;ec{j};ec{k})$ في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

نعتبر النقط (1:-2;4) ، A(2;3;-1) ، النقط (3;0;-2) ، B(1;-2;4)

أي النقط B ، B ، D ليست على استقامة واحدة . ونعلم أن كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفضاء تشكل مستو وحيد .

ومنه (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

(الجواب صحيح) 25x - 6y - z - 33 = 0

ك لدينا : $\overrightarrow{n}(2;-1;2)$ و $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$ شعاعا ناظميا (3)

للمستوي (P) إذا كان المستقيم (CD) عمودي

 \overrightarrow{n} على المستوي (π) فإنCD : على المستوي

 $\overrightarrow{n}=\lambda \stackrel{\longrightarrow}{CD}$: معناه يوجد عدد حقيقي λ حيث

$$\overrightarrow{D}$$
 اي : $1 = -\lambda$ \longrightarrow $\lambda = -1$ \longrightarrow $\lambda = -1$ \longrightarrow $\lambda = 1$ اي وازي $\lambda = 0$ اي $\lambda = 0$ $\lambda = 0$

(P) ليس شعاعا ناظميا للمستوي $\stackrel{
ightarrow}{CD}$: أي

ومنه : (الجواب خاطئ) .

4) لدينا:

$$BH = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-1-(4))^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

$$d(B;(P)) = \frac{|-2(1) - (-2) + 2(4) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}}$$
$$= \frac{9}{\sqrt{9}} = \sqrt{9}$$

ومنه $BH \neq d(B;(P))$ ومنه (الجواب خاطئ) ,

(بكلوريا علمي 2010)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس B(2,1,1) و A(1,1,0) و C(-1,2,-1)

ا ()) بين أن النقط A و B و C ليست في استقامية . P بين أن المعادلة الديكارنية للمستوي P P مي P بين أن المعادلة الديكارنية للمستوي P P مي P (P) بعتبر المستويين P (P) و P (P) اللذين معادلتيها على P الترتيب P (P) و P (P) اللذين معادلتيها على P الترتيب P (P) و P (P) و P (P) الذي و مشمل النقطة P (P) P (P) و المستقيم P (P) الذي يشمل النقطة P (P) P (P) و P (P) و P أن شعاع توجيه له .

1) أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D).

(D) ب تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D). 3 عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) و (P) و (Q).

حل التمرين 14 ;

ا) أ) لدينا AB(1,0,1) و AC(-2,1,-1) و بها أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $AC=k\overline{AB}$ فمعنى ذلك أن النقط C,B,A ليست إستقامية .

ب) يمكنك التأكد بكل سهولة من أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : 0 = x + y - z - 2 = 0 و ذلك بتعويض إحداثيات كل نقطة النقط C, B, A تحقق المعادلة. (2) أ) يعطى التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $(\Delta, 1, 5, 3)$ كما يلي :

ر بابت ر $x=-\lambda$ مع λ عدد حقیقی ثابت , $y=5\lambda+4$ $z=3\lambda+3$

ب) تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$
 التي تحقق: $M(x, y, z)$

$$\begin{cases} x + 2y = 3i - 1 \\ 2x + y = i + 1 \end{cases}$$

$$|z| = 1$$

ب) أحسب الطول ١١١،

ب) تحقق أن النقطة الم تنتمي إلى المستقيم (١) .

ج) أحسب مساحة الثاث ABC ..

حل التعرين 15:

إحداثيات الم بتعويض ال بـ (ا و ت بـ (ا في معادلة (١٠) للحصل على 3 - (١٠ بالتالي إحداثيات الم هي (١٠,١١) (٤))
 إحداثيات B تحقق معادلة (٩).

$$AB = 3\sqrt{2}$$
 (

ج) لتكن d المسافة الطلوبة ، عنادلا.

$$d = \frac{|x_e - 2y_e + z_e + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (4) : بها أن (4) عمودي

$$(P)$$
 على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه (A) هو ناظمي أ

و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي (١٠٠2.١)

وبالتالي التمثيل الومسطى للمستفيم الذي يشمل (١٠٠٩،٠٤)

$$t = 3\lambda + 3$$

$$z = -\frac{1}{3}t + 1$$

$$y = \frac{5}{3}t - 1$$

$$z = t$$

$$(D)$$
نجد: $x = -\lambda$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم $x = -\lambda$ $y = 5\lambda + 4$: $z = 3\lambda + 3$

طريقة أخرى: بها أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فيعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتي المستويين.

إحداثيات نقط المستقيم (D)هي $(3\lambda + 4, 3\lambda + 3, 5\lambda + 4, 5\lambda +$

 $-2+(5\lambda+4)-3(3\lambda+3)+1=0$ و نفس الأمر مع معادلة المستوي (Q) .

نعیین نقاطع (ABC) و (P) و (Q):

نعلم أن $(P) \cap (Q) = (D)$ نعوض X; Y; Z من التمثيل الوسيطي لـ (D) في معادلة (ABC) نجد:

$$-\lambda + (5\lambda + 4) - (3\lambda + 3) - 2 = 0$$
$$\lambda = 1$$

$$(P) \cap (Q) \cap (ABC) = \{(-1,9,6)\}$$

$$z = 6$$

(بكلوريا علمي 2010)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0.\vec{i}, \vec{j}.\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته 0=z+z+3=0 الذي معادلته z=0 الفواصل (0,i) يعرف بالجملة z=0

مع ٨ عدد حقيقي كيفي . ب) حتى تكون A نقطة من (Δ) يجب البحث عن عدد $[-3=\lambda-1]$

حقیقی وحید λ محقق $\lambda - 2\lambda = 0$ واضح أن $0 = \lambda + 2$

 $_{-}(\Delta)$ يحقق الجملة و منه A نقطة من $\lambda=-2$

 $\frac{1}{2}d \times AB$ هي ABC حيث $\frac{1}{2}$ حيث ج ومنه مساحة $ABC=3\sqrt{2}$ هي $d=2\sqrt{6}$

(بكلوريا علمي 2011) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس A(1;-2;1) ، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، و ليكن $\vec{n}(-2;1;5)$

(P) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

x + 2y - 7 = 0 المعادلة

2) أ) تحقق أن النقطة B(-1;4;-1) مشتركة بين المستويين

(Q) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) لتكن النقطة (5;-2;-1)

أ) أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة (Q) بين النقطة C و المستوي

ب) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج) استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

حل التمرين 16:

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P): $\vec{n}(-2,1,5)$ و A(1,-2,1) و A(1,-2,1) و المستوي $M(x, y, z) \in (P)$ شعاع ناظمي له نفرض

 $\widehat{AM}(x-1,y+2,z-1)$: ولدينا . \widehat{AM} . $\widehat{n}=\widehat{0}$ -2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0: نا يعني آن $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ -2x+2+y+2+5z-5=0: أي: 0=1−2x+y+5z-1 و عليه معادلة المستوي -2x+y+5z-1=0: (P)

(Q) أ) التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين(P)و

: کا B∈ (P)

-2(-1)+4+5(-1)-1=2+4-5-1=0

(-1)+2(4)-7=-8+8=0 : טע $B \in (Q)$

(Q) و عليه النقطة B نقطة مشتركة بين المستويين ب) إثبات أن المستويين (P)و (Q) متقاطعان وفق مستقيم

 $: (\Delta)$

لدينا (-2,1,5) شعاع توجيه (P) و (-2,1,5) شعاع توجیه المستوی (Q) و بها أن \vec{n} و \vec{n} غیر مرتبطین خطیا فإن (P) و (Q) غير متوازيين فهها إما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

Z=t لدينا: $\begin{cases} -2x+y+5z-1=0\\ x+2y-7=0 \end{cases}$ بوضع

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - 5t \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$
: indeed, in the contraction is the contraction of th

x = 2t + 1 $t \in R$ مع $y = -t + 3 : (\Delta)$

(3) لتكن النقطة (3-,5;-2)

C و المستوي (P) أو المسافة بين C

و المستوي (Q):

$$d(C,(P)) = \frac{|-2 \times 5 + (-2) + 5(-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (5)^2}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(C,(Q)) = \frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (-2 \times 1) + (2 \times 1) + (0 \times 5) = 0$$
 : iلدينا : (P) و (P) متعامدان.

 $:(\Delta)$ و C بين ج) استنتاج المسافة بين

بها أن المستويين (P) و (Q) متعامدان و متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و بتطبيق نظرية فيثاغورث :

$$D(C,(\Delta)) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9\times30}{25} + \frac{180}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{450}{25}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

(بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس C(3;-3;6) B(2;1;7) ، A(0;1;5) النقط O(i;j;k) الذي يشمل النقطة B أن أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $\bar{u}(1;-4;-1)$ و وراء توجيه له.

 \cdot (Δ) المستقيم (Δ) تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج) بين أن الشعاعين AB و BC متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

2) نعتبر النقطة (2+t:1-4t:7-t حيث M (2+t:1-4t:7-t حيث

عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على R بـ:

h(t) = AM

أكتب عبارة (۱) بدلالة 1.

 $r:h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$

 ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي 1 التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (۵).

حل التمرين 17:

(Δ) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ): المستقيم (Δ) عتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) شعاع توجيه له. $\overline{BM} = \overline{\lambda}i$ O (Δ) و $\overline{BM} = \overline{\lambda}i$ O (Δ) نقطة من (Δ) و $\Delta \in R$ (Δ) و منه: $\Delta \in R$ (Δ) مو التمثيل الوسيطي لـ (Δ). $\Delta \in R$ (Δ) التحقق أن النقطة Δ تنتمي إلى (Δ) :

و بالتالي الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} متعامدان.

والمستوى (P) ذا المعادلة zv + z + 1 = 0

r = -1 $_{V}=2+eta$: ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $z=1-2\beta$

حيث eta وسيط حقيقي.

 أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

(2) بين أن المستقيمين $(\Delta)_{e}(BC)$ ليسا من نفس المستوى.

(2) أ أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب/ بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.

4) بين أن ABCD رياعي وجوه ، ثم أحسب حجمه.

حل التمرين 18:

(1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (*BC*)

لتكن M(x; y; z) نقطة من M(x; y; z)

 $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$, $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z+1)$: $\overrightarrow{BM} = \lambda . \overrightarrow{BC}$

ومنه:
$$x = \lambda + 1$$
 حیث λ وسیط حقیقی. $z = 2\lambda - 1$

(P) التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوى

$$(2y+z+1=0]$$
 في معادلة $(x=\lambda+1)$ نعوض كل من $(x=\lambda+1)$ $(z=2\lambda-1)$

0=0 نحصل على: $0=1+(2\lambda-1)+(2\lambda-1)$ أي (P)ومنه فإن المستقيم (BC) محتوى في المستوي(P).

(2) إثبات أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي

(BC) شعاع توجيه للمستقيم $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ لدينا

 $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$ و (Δ) منعاع توجيه للمستقيم U (0;1;-2)

د) استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

بها أن B من (Δ) و \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} متعامدان فإن :

$$d(A,(\Delta)) = AB = \sqrt{(2)^2 + 0^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

: t بدلالة h(t) كتابة (1)

$$h(t) = AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{(2+t)^2 + (1-4t-1)^2 + (7-t-5)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{4 + 4t + t^2 + 16t^2 + 4 + t^2 - 4t}$$

$$h(t) = \sqrt{8 + 18t^2}$$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقى :

$$h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2 + 8}}$$

الدالة h(t) قابلة للإشتقاق على R ودالتها المشتقة هى :

$$h'(t) = \frac{(8+18t^2)'}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

ج) قيمة العدد الحقيقي t التي يكون من أجلها المسافة AM h'(t) = 0 أصغر ما يمكن هي عندما يكون t = 0 و عليه t = 0.

القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي:

$$h(0) = \sqrt{8 + 18(0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

 $h(0) = d(A, (\Delta))$: $e^{-2(A+1)}$

(بكلوريا علمي 2013)

 $(o;ec{i}\,;ec{j};ec{k})$ الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس

D(2;0;-1), C(2;-1;1), B(1;0;-1), A(-1;1;3)

حجمه V: (و.ح)

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{CD \times BD}{2} \right) \times d((P); A)$$
$$= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{5} \times 1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 1$$

وعليه فإن الشعاعان \overrightarrow{BC} و \overrightarrow{U} غير مرتبطان خطيا وعليه يكون المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \end{cases}$$

$$z = 2\lambda - 1 \quad \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$

$$\lambda = -2$$
 : نضع: $2 + \beta = -\lambda$ من (1) فإن: $2 + \beta = -\lambda$ نضع: $1 - 2\beta = 2\lambda - 1$ من (1)

eta=0 نعوض قيمة $\Delta=-2$ في المعادلتين (2) و(3) نجد: $\beta=0$ و $\beta=3$ و $\beta=3$ و منه $\beta=3$ ليسا من نفس المستوي.

A أ حساب المسافة بين النقطة A و المستوي

(P):
$$d((P); A) = \frac{|2(1) + (3) + 1|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب/ إثبات أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم. D نعوض إحداثيات D في معادلة D نجد: D الجد: D ومنه D وعليه فإن D نقطة من D.

$$BC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$
 ولدينا:
$$BD = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$

$$CD = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

 $BC^2 = BD^2 + CD^2$: V

D ومنه حسب فيثاغورث فإن: المثلث BCD قائم في

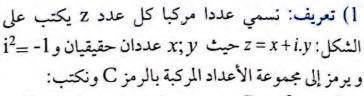
4) إثبات أن ABCD رباعي وجوه ، ثم حساب حجمه.:

بها أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) و D نقطة (S)

ABCD من $A \not\in (P)$ مثلث و BCD فإن

رباعي وجوه .

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية



$$C=z/z=x+iy\;;x,y\in R\;;\;i^2=-1$$
 - يسمى x الجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز . Re(z)

- يسمى y الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز Im(z)

ونكتب عندئذ وبصفة عامة:

$$z = x + i.y$$
: الشكل الجبري لعدد مركب
حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$z = x + i.y$$
 :مرافق العدد المركب

$$\overline{Z} = x - iy$$
: حیث $x; y$ عددان حقیقیان هو خواص مرافق عدد مرکب:

$$\overline{\overline{z}} = z$$
.

$$z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \cdot$$

$$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}.$$

$$z\neq 0$$
 مع $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$ •

$$z+\bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z-\bar{z}=2iIm(z)$$
 •

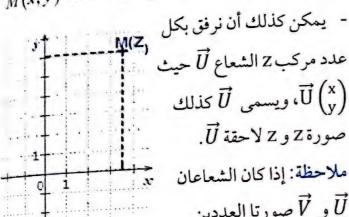
$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \cdot$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$z'\neq 0$$
 مع $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ •

 $(o; \vec{i}; \vec{j})$ التمثيل النقطي لعدد مركب: في م م م م م (3 z = x + i.y صورة العدد المركب M(x; y)

M(x;y) هو لاحقة النقطة z=x+i.y العدد المركب



و $ec{V}$ صورتا العددين $ec{U}$

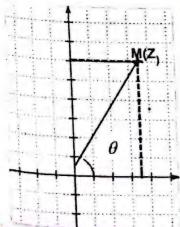
المركبين Z وZ'على الترتيب يكون الشعاع $\vec{U}+\vec{V}$ هو صورة العدد المركب Z+Z'، ويكون الشعاع $\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V}$ هو صورة العدد المركب Z-Z'.

 4) طويلة وعمدة عدد مركب: M نقطة معرفة بإحداثيها الديكارتية (x, y) أو بإحداثييها القطبية (r, θ) لدينا: OM = r

 $x = rcos\theta = rsin\theta$ و $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ والموجهة $sin\theta = \frac{y}{r} \quad cos\theta = \frac{x}{r}$: • طويلة العدد المركب Z:

 $\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \left| Z \right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

•عمدة العدد المركب Z :



 $\arg(Z) = \theta + 2k\pi$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

خواص الطويلة والعمدة

العدد المركب	الطويلة	العمدة
:	r	θ
:'	r'	θ^*
zn	r^{n}	nθ
:·	r.r'	$\theta + \theta'$
<u>z</u>	<u>r</u>	
z'	r'	$\theta - \theta'$

ملاحظات: B،A نقطتان من المستوي لاحقتاهما Z_A و Z_B على النرتيب:

- $AB = |z_B z_A| (1$
- $arg(z_B-z_A) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB})$ (2)
- $arg(z_B)$ - $arg(z_A) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ (3
 - 5) الشكل المثلثي لعدد مركب:

نعربف: Z عدد مركب غير معدوم.

العدد $Z=r.(\cos\theta+i.\sin\theta)$ حيث $Z=r.(\cos\theta+i.\sin\theta)$ حيث z=|z| المثاني z=|z| المثاني المثاني z=|z| المعدد المركب z .

6) الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:

1) نعریف: العدد المرکب الذي طویلته 1 و θ عمدة له یکتب $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ حیث: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ تسمی هذه الکتابة بترمیز أولر. وإذا کان $z = \cos\theta + r\sin\theta$ مع $z = \cos\theta + r\sin\theta$ فإن:

تسمى هذه الكتابة الشكل الأسي للعدد المركب z = reⁱ⁰.

م بحواص: ٥ . ده

θ و 'θ عددان حقیقیان:

 $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}$

 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \cdot \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$

دستور موافر: Z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له من $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ دماه عير معدوم لدينا: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

7) المعادلات من الدرجة الثانية:

1. سرهنة:

 $az^2 +bz+c=0: z$ لتكن المعادلة ذات المجهول المركب $z=-b^2-4ac$ az=0 مميزها. حيث $z=-\frac{b}{2a}$ أعداد حقيقية مع $z=-\frac{b}{2a}$ مضاعفا $z=-\frac{b}{2a}$ أفإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\frac{b}{2a}$ أوان المعادلة تقبل حلين متمايزين $z=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z=-\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- إذا كان $\Delta < 0$: فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين وذلك بوضع $i^2 = -1$ في عبارة Δ

2. الجذران التربيعيان لعدد مركب:

تعريف

 z_0 عدد مركب معطى . الجذرين التربيعيين للعدد z_0 هما حلا المعادلة $z^2 = z_0$ في المجموعة $z^2 = z_0$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطبة

T و M' لاحقتها C و M' لاحقتها C و M' لاحقتها C و C تحويل نقطي في المستوى يرفق بكل نقطة C و C و C حيث C = C و C

نې a	طبيعة التحويل T	عناصره المميزة
a = 1	انسحاب	$z_0 = b$ شعاعه ii لاحقته
a∈ R*-{1}	تحاكي	Ω نسبته $k=a$ ومركزه النقطة الصامدة C لاحقتها C
$a \notin R$ $ a = 1$	دوران	مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $\theta = \arg(a)$: وزاويته $\sigma = \frac{b}{1-a}$
j a ∈ R a = 1	تشابه مباشر	مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $ heta=arg(a)$: وزاويته $z_0=rac{b}{1-a}$ ونسبته : $k= a $:

تمارين

 \overline{Z} و Z^{2009} ، $\frac{1}{Z}$: و Z^{2009} و Z^{2009}

$$\frac{1}{Z} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]$$
لينا •

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z^{2009} = \left[\left(2\sqrt{2} \right)^{2009}, \frac{7 \times 2009\pi}{12} \right] \bullet$$

ولدينا: 11 + 12×12 + 11 = 14063 = 1171 = 7×2009

$$14063 = 1172 \times 12 - 1$$
 أي

$$\frac{14063\pi}{12} = 1172\pi - \frac{\pi}{12}$$
: و منه

$$Z^{2009} = \left[\left(2\sqrt{2} \right)^{2009}, \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] : 0$$

$$Z^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$
:

$$\overline{Z} = \left[2\sqrt{2}, \left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$\widetilde{Z} = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

عين الطويلة و عمدة للعدد المركب Z في كل حالة من الحالات التالية:

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-1)$$

 $Z = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$ is in its interval is zero.

1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري .

2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

 \overline{Z} و Z^{2009} , $\frac{1}{7}$: أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية Z^{2009} , و Z^{2009}

حل التمرين 01:

1) كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري:

$$Z = \frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4} = (1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

2) كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي:

$$Z = (1+i)(1+i\sqrt{3})$$
 لدينا

$$z_2 = (1+i\sqrt{3})$$
 و ليكن $z_1 = (1+i)$

$$k\in Z$$
 مع $Arg(z_1)=rac{\pi}{4}+2k\pi$ الدينا

$$z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$
 ومنه

$$k \in \mathbb{Z}$$
 $\sim Arg(z_2) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $|z_2| = 2$

$$z_2 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right] c_{12}$$

$$|Z| = 2\sqrt{2} \text{ on } Z = z_1 \times z_2$$

$$Arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

.
$$Z = 4 \left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
 (1) $Z = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$ و بالتالي $Z = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$ و بالتالي $Z = \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right)$

$$Z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \leftrightarrow \infty$$

الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

$$Z = -2\left(\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\sin(-\frac{\pi}{6}) + i\cos(-\frac{\pi}{6})\right)$$

$$Z = 2\left(\cos(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6})) + i\sin(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6}))\right)$$

$$Z = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$$

$$E = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$$

 $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2 - 8\sqrt{3}.z + 64 = 0$

2) نعتبر النقطتين A و B لاحقتاها على الترتيب: $z_{B} = 4\sqrt{3} + 4i$, $z_{A} = 4\sqrt{3} - 4i$ أ/ أكتب z_A و z_B على الشكل الأسى .

. OAB با طبيعة المثلث

 $z_C = -\sqrt{3} + i$ لتكن C النقطة ذات اللاحقة (3 $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}.z_C$: و لتكن النقطة D حيث

D عين لاحقة 0

 $\{(B,1),(D,1),(O,-1)\}$ مرجح الجملة (4

 $Z_G = 4\sqrt{3} + 6i$: أ برر وجود G ثم بين أن لاحقتها

أمن المستوي التي تحقق العلاقة الأتية:

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) (\xi)$$
$$Z = -2 \left(\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) (\xi)$$

حل التمرين 02 :

تعين طويلة و عمدة العدد المركب Z :

$$Z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

 $k \in Z$ $\longrightarrow Arg(Z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$Z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad (9)$$
$$= 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 3\left(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})\right)$$

 $k \in Z$ ون $Arg(Z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ و |Z| = 3

$$Z = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}) \right) \omega_j$$

.
$$OG$$
 ، DG ، BG بالسافات $K \in Z$ مع $Arg(Z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $|Z| = \sqrt{2}$ مع $|Z| = \sqrt{2}$ مع $|Z| = \sqrt{2}$ مع النقط $|Z| = \sqrt{2}$ من المستوى التي تحقق العلاقة الأتية :



// G موجودة لأن: 0 ≠ 1 = (1 + 1 + 1 وتحفق : G نعيين لاحقة $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{0}$ نعيين لاحقة

$$4 = \frac{z_8 + z_0 - z_0}{1 + 1 + (-1)} = 4\sqrt{3} + 4i + 2i - O = 4\sqrt{3} + 6i$$

: OG; DG; BG باب المسافات

$$BG = |z_G - z_B| = |4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} - 4i| = |2i| = 2$$

$$DG = |z_G - z_D| = |4\sqrt{3} + 6i - 2i| = |4\sqrt{3} + 4i|$$

$$= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = 8$$

 $OG = |z_G| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ ج) تحديد حسب قيم ل مجموعة النقط M التي تحقق:

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$

 $BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$ الدينا:

$$\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = \lambda$$

$$BG^{2}+GM^{2}+2\cdot \overrightarrow{BG}\cdot \overrightarrow{GM}+DG^{2}+GM^{2}+=\lambda$$

$$2\overrightarrow{DG}\cdot \overrightarrow{GM}-OG^{2}-2\overrightarrow{DG}\cdot \overrightarrow{GM}-GM^{2}$$

$$BG^2 + DG^2 + -OG^2 + 2GM \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG}\right) + GM^2 = \lambda$$

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$$
 : if it is

$$GM^2 = \lambda - BG^2 - DG^2 + OG^2$$

= $\lambda - 4 - 8 + 84 = \lambda + 72$

 $GM^2=0$: نان کان کان کان کان کان کان کان ا

. G هي النقط M هي النقطة G

. $\lambda > -72$ إذا كان 0 < 72 + 1 أي

فإن مجموعة النقط 11 هني جميع نقاط الدائرة التي مركزها

 $r = \sqrt{\lambda + 72}$ ونصف قطرها G

ا إذا كان $0 > 72 + \lambda$ أي $2 - 2 > \lambda$. فإن مجموعة $\lambda + 72 < 0$

النقط M هي مجموعة خالية .

حل التمرين 03 :

 $Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64 = 0$: حل المعادلة: (1

نحسب المميز المختصر Δ':

$$\Delta' = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - (1)(64) = -16 = (4i)^2$$

وعليه فالمعادلة تقبل حلان متهايزان:

$$Z' = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{1} = 4\sqrt{3} - 4i$$

$$Z'' = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{1} = 4\sqrt{3} + 4i$$

 2 كتابة كلا من 2 و 2 على الشكل الأسي :

$$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$$
 $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$

 z_A تعين طويلة وعمدة

$$|z_A| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$Arg(z_A) = \theta : \begin{cases} \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

 $(k \in Z)$: حيث $Arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: وعليه فإن

$$z_A = 8 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$
 : z_A الثلثي لـ z_A

 z_B تعين طويلة وعمدة

تعین طویله وعمده
$$|z_B|=|z_A|=8$$
 بها آن $|z_B|=|z_A|=8$ بها آن $|z_B|=|z_A|=8$ بها آن مترافقان فإن

$$Arg(z_B) = -Arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$z_B = 8 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
: z_B يومنه فالشكل المتلثي ل

$$z_D = e^{-\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot z_c : z_D$$
 تعيين لاحقة (3

$$z_{p} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2i$$

0.4

2) عن في محوعة الأعداد المركبة أك المعادلة ذات المجهول 2 التولية : (1 - 4 + 4 - 1) . ويتارية : (1 - 4 + 4 - 1) . ويتارية : (1 - 4 + 4 - 1) . ويتارية على الشكل الأسي . ويتاريخ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس "" من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس "" من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس "" من المنتوي المنسوب المناسوب المناسوب المناسوب المناسوب المناسوب المنسوب المناسوب ا

ريد ($O_{1}, v_{1}, v_{2})$ التي لاحقانها على الترتيب $Z_{C} = -Z_{A}$ و $Z_{H} = 1 - 1 \sqrt{3} \cdot Z_{A} = 1 + 1 \sqrt{3}$. $C_{1} \cdot B_{1} \cdot A$ عند لنقط $C_{2} \cdot B_{2} \cdot A$

 $\frac{z_{H}-z_{A}}{z_{H}-z_{C}}$ ب التب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_{H}-z_{A}}{z_{H}-z_{C}}$ و عمدة له ثم ما عبن طويلة العدد المركب $\frac{z_{H}-z_{A}}{z_{H}-z_{C}}$ و عمدة له ثم مستنج طبعة المثلث ABC

M قر T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الاحقة Z' بحيث :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 - i\sqrt{3}$$

T و عناصره المميزة. T عين صورة النقطة A بالتحويل T.

ج) استنتج طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة.

مل التعرين 04 :

 $\Delta = -12 = 12i^{2}, z^{2} - 2z + 4 = 0: C = 12i^{2}, z^{2} - 2z + 4 = 0: C = 12i^{2}, z^{2} - 12i^{2}, z^{2} - 12i^{2}, z^{2} = 1-i\sqrt{3}, z^{2} = 1+i\sqrt{3} = 12i^{2}, z^{2} = 1+i\sqrt{3} = 12i^{2}, z^{2} = 1+i\sqrt{3} = 12i^{2}, z^{2} =$

 $z_B - z_A$ ب) الشكل الجبري لـ $z_B - z_C$

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2i\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} : \text{acis} \quad \frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} \text{ alg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ of }$$

$$Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ of }$$

 $...k \in z$ أن المثلث ABC: بما أن

$$Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

فان المثلث ABC قائم في B.

3) أ) طبيعة التحويل T: لدينا العبارة المركبة للتحويل T:

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3 - i\sqrt{3}$$

بما ان $1 \neq 2 = |1 - i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$ فان T تشابه نسبته $z_{\Omega} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = -1 - i\sqrt{3} = z_{C}$ ومركزه $arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

ب) صورة النقطة A بالتحويل T:

$$z_{B}^{\ \prime} = (1 - i\sqrt{3})z_{A} + 3 - i\sqrt{3}$$
 $z_{B}^{\ \prime} = (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) + 3 - i\sqrt{3}$ اي $z_{B}^{\ \prime} = 7 - i\sqrt{3}$ ومنه $z_{B}^{\ \prime} = 7 - i\sqrt{3}$

ج) طبیعة ToT: بما أن T تشابه نسبته ToT تشابه نسبته $arg(ToT) = -\frac{2\pi}{3}$ و زاویته هي $|a| \times |a| = 4$

الشريل 05

المعادلة ذات المجهول C=1 المعادلة ذات المجهول C=1 المعادلة ذات المجهول C=1 (C=1 (C=1 (C=1) التالية : C=1 المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس C=1 النقط C=1 النقط C=1 التي لواحقها على الترتيب C=1 التي لواحقها على الترتيب C=1 المنسوب C=1 المنسوب C=1 المنسوب C=1 المنساب المنساب C=1 المنساب المنسا

ب) أحسب الأطوال AB،OB،OA ثم استنتج طبيعة . OAB

 $E_D=-\sqrt{3}+i$ والنقطة التي لاحقتها D+i و D و صورتها D بالدوران الذي مركزه D وزاويته D

. E عين z_{ε} لاحقة النقطة *

 $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$ د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة المثقلة G علل وجود النقطة G و بين أن هذه النقطة لاحقتها هي *

 $z_g = 4\sqrt{3} + 6i$

هـ) بين أن النقط G.E.D على استقامة واحدة.

: حين (E) بحموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث

 $\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO} = \vec{MA} - \vec{MB}$

حل التمرين 05 .

 $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$: C حل في $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$ $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$ $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$ او z=4 کافئ z=4 و منه $z=4\sqrt{3}-4i$ و منه $z=4\sqrt{3}-4i$

 $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$ $z_2 = -04 = 04i$

 $s = \left\{4\sqrt{3} + 4i; 4\sqrt{3} - 4i; 4\right\}$ \(\text{iii}\) $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$

 $z_{A} = 4\sqrt{3} - 4i$ النقط $z_{C} = 4\sqrt{3} - 4i$ النقط $z_{C} = 4$ و $z_{B} = 4\sqrt{3} + 4i$

أ) كتابة مع و على الشكل الآسي:

$$|z_B| = \left|4\sqrt{3} + 4i\right| = 2$$

 $arg(z_B) = arg(4\sqrt{3} + 4i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi...k \in Z_3$

$$z_B = 8e^{\frac{i\pi}{6}} \quad z_A = 8e^{\frac{i\pi}{6}}$$

 $OB = |z_B| = 8, OA = |z_A| = 8$: AB, OB, OA ب) الأطوال

 $OAB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$

متقايس الأضلاع

$$z_{o} = -\sqrt{3} + i$$
: لتكن (ج

ر صورة E بالدوران الذي مركزه D وزاويته E معناه $Z_E = e^{-\frac{i\pi}{3}} Z_D$ معناه

$$z_{E} = (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})(-\sqrt{3} + i)$$

$$z_{E} = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3} + i) = 2i \text{ (b. 1)} \cdot (P(1)) \cdot$$

د)
$$G$$
 مرجح الجملة G (G ;-1);(B ;1);(E ;1) مرجح الجملة G مرجح الجملة G موجودة بما أن G موجودة

$$z_G = 4\sqrt{3} + 6i$$
: لاحقة G هي

$$z_G = \frac{-z_O + z_B + z_A}{1} = z_B + z_A = 4\sqrt{3} + 6i$$

هـ) النقطG,E,D على استقامة واحدة معناه

$$\alpha \in R$$

$$\alpha = \frac{z_E - z_D}{z_G - z_D} \quad \overrightarrow{DE} = \alpha \overrightarrow{DG}$$

$$G, E, D$$
 ومنه النقط $\frac{z_E - z_D}{z_G - z_D} = \frac{\sqrt{3} + i}{5\sqrt{3} + 5i} = \frac{1}{5}$

على استقامة واحدة.

z عين z عين عين النقط z النقط النقط z دات اللاحق z بحيث:

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MG}\|$$

$$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MA} + \vec{BM} = \vec{BA}$$

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

$$\|\vec{MG}\| = \|\vec{BA}\|$$

$$\vec{EBA}$$

تكافئ MG = BA ومنه مجموعة النقط MG = BA التي مركزها G و نصف قطرها BA = BA

المرين 06

P(z) نعنبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z) = 2z^3 - z + 1$: للمنغبر المركب z حيث P(z) = 0 المنغبر المركب P(z) = 0 بين أن العدد P(z) = 0 للمعادلة P(z) = 0 بحيث : P(z) = 0 بحيث :

$$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$$

ج) حل في المجموعة C المعادلة : P(z)=0 ثم اكتب A هذه الحلول على الشكل الآسي.

(O; u, v)المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (C; u, v)المنوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $C_i B_i A$ النقط $C_i B_i A$ صور الأعداد المركبة $z_c = \overline{z_B}$.

ا) عين اللاحق z_D للنقطة D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C,-1)\}$

ب) لتكن E صورة E بالتحاكي الذي مركزه E ونسبته $\frac{3\pi}{2}$. E بالدوران الذي مركزه E و زاويته E . E عبن E عبن E و E بالخقتي النقطتين E على الترتيب . E

 $2z^3 - z + 1 = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

حل التمريين 06 :

 $P(z) = 2z^3 - z + 1$ نعتبر: $P(z) = 2z^3 - z + 1$ نعتبر: المعادلة P(z) = 0 معناه P(-1) = 0

$$\begin{cases} a=2\\ b+a=0; b=-2: الطابقة نجد
$$c+b=-1 \end{cases}$$$$

$$c = 1$$

$$P(z) = (z+1)(2z^{2} - 2z + 1) = 0$$

$$P(z) = 0 = 0$$

$$(z_0 = -1)$$
 زانی $z + 1 = 0$ تکافئ $P(z) = 0$ ای $z + 1 = 0$ او $z - 2z + 1 = 0$

 $\Delta = -4 = 4i^2 \quad 2z^2 - 2z + 1 = 0$

 $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ and

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot z_0 = e^{i\pi}$$

C.B.A (2 صور الأعداد المركبة :

$$z_c = \frac{1}{2} \frac{i}{2} = z_0 = z_0$$
 $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot z_1 = -1$

: معناه $\{(A;1);(B;1);(C,-1)\}$ معناه $z_{D}(1)$

$$z_D = \frac{z_A + z_B - z_C}{1 + 1 - 1} = -1 + i$$

2 ونسبته E مورة E بالتحاكي الذي مركزه E ونسبته $z_E=2z_B+(1-2)z_C$ معناه

$$z_E = 2(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$
 (1)

 $rac{3\pi}{2}$ صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته F st

$$z_F = e^{\frac{3\pi}{2}i} z_C + (1 - e^{\frac{3\pi}{2}i}) z_B \qquad :$$

$$= -i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(1 + i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

السرين 07

 $z^2 - 6z + 34 = 0$ المعادلة C المعاد المواحث المعاد و المتجانس $z^2 = 0$ المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس z = 0 المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس z = 0 المنتوي المتعامد و المتجانب z = 0 المنتوي المتتب المنتوي و z = 0 المنتوي المتتب المنتوي و z = 0 المنتوي و z = 0 المنتوي المنتوي و z = 0 المنتو

الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

أ) لتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها

$$|z'|=1$$
 حيث z

* عين و أنشئ (F).

ب) لتكن(E)مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها B حيث يكون z' تخيليا صرفا ، برهن أن : النقطة z

(E) ثنتمي إلى (E) ثم عين

 $\frac{\pi}{2}$ الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ و زاويته (3)

R عين لاحقة B' صورة B بالدوران

 $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ ب عين لاحقة I' صورة I بالدوران R حيث: $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ عين صورتي I(F) , I(F) بالدوران I(F)

حل التمرين 08 :

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ (1)

 $z^2 - z + 2 = 0$ أو z = 2i : معناه

-2i , 2i هما $\Delta=-4$

 $z_1 = 1 + i$: تقبل حلين هما $z^2 - 2z + 2 = 0$

: $z_2 = 1 - i$

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

 $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$: ولدينا

. $z \neq 1+i$: حيث $z' = \frac{z-2i}{z-1-i}$ (أ (2)

التي تحقق |z'|=1 هي محور M التي تحقق |z'|=1

 $\cdot [AB]$ القطعة

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوي التي يكون

من أجلها 'z تخيليا صرفا .

* (E) ثم تعيين B ثنات أن B تنتمي إلى B

و العدد C هو تخيلي صرف $z_{B'} = \frac{2i-2i}{2i-1-i} = 0$

حل التمرين 07:

 $z^2 - 6z + 34 = 0$ حلا المعادلة $z^2 - 6z + 34 = 0$

 $\Delta = (-6)^2 - 4.(1)(34) = -100 = (10.i)^2$: لدينا

 $Z_1 = \frac{6-10.i}{2}$: و عليه المعادلة تقبل حلين متهايزين

 $z_2 = 3 + 5i$ و $Z_1 = 3 - 5i$ و $Z_2 = \frac{6 + 10i}{2}$

اً) من تعريف الانسحاب : $\overline{MM'} = \overline{u}$ و بالانتقال

إلى تساوي اللاحقتين نجد :

z' = z + 4 - 2i: z' - z = 4 - 2i

 $\frac{b-c}{a-c} = \frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}$

$$= \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} \times \frac{-4 - 2i}{-4 - 2i} = \frac{40i}{20} = 2i$$

النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T معناه :

وهذا محقق $z_C = z_A + 4 - 2i$

 $\frac{b-c}{a-c}=2i$ من المساواة (ABC ج. استنتاج طبيعة المثلث

 $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$: نستنتج أن

 $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |2i|$: نستنتج أن أن $\frac{b-c}{a-c} = 2i$ من المساواة

C قائم في النقطة ABC قائم في النقطة $\frac{BC}{AC} = 2$

 $BC = 2AC_{\theta}$

 (O,\vec{u},\vec{v}) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس (الوحدة 2cm)

 $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$: مل في C المعادلة (1

(اكتب الحلول على الشكل الجبري ثم الأسى)

 $z_{\scriptscriptstyle B}=2i$ ، نقطتان لاحقتاهما: B,A (2

من أجل كل عدد مركب z نعتبر العدد المركب z حيث:

, عليه فإن B تتمي إلى (E). «يكون 'z تخيليا صرفا إذا كان 0='z $\arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}_{1}$ عددان حقيقيان يطلب تعيينها .

و عليه : z = 2i10 $(\overline{AM}, \overline{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}$

والمجموعة(E)هي الدائرة التي قطرها [AB] باستثناء

عبارة
$$z' - \left(\frac{3}{2} + i\frac{5}{2}\right) = i\left(z - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right)$$
 (1) (3)

 $rac{\pi}{2}$ الذي مركزه Ω و زاويته الدوران

$$z_{B'} = i\left(2i - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{5}{2}$$

ب) $z_{B'}=2+i$ هي صورة B بالدوران R و بالمثل: $Z_{\Gamma} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

(F) عبين صورتي (E) و (F) بالدوران

النقطة I هي منتصف القطعة [AB] أي أن I هي مركز* \cdot (E) الدائرة

و بها أن الدوران يساوي قياس فإن صورة (E) هي الدائرة $rac{1}{2}AB$ التي مركزها I' و لهما نفس نصف القطر (E')

 * صورة Fبالدوران R هي محور القطعة [A'B']حيث : B' = R(B) , A' = R(A)

1) نعتبر كثير الحدود P(z) للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ $\overline{z_0}$ ين انه اذاكان z_0 حلا للمعادلة P(z)=0 فان أ $(z_0$ مرافق $\overline{z_0})$ علا لها ايضا

bو عبت $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

P(z)=0 المعادلة C ج $^{\prime}$ حل في 2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس(0,1,1) نعتبر النقط C, B, A التي لواحقها :

على النرتيب $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}z_C = 2 - i\sqrt{3}$ $|z_B - z_C|$, $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_A|$ (1) استنتج طبيعة المثلث ABC .

 $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$ ب) عين z_{G} لاحقة G مرجع الجملة $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ج) احسب طويلة وعمدة للعدد المركب ثم اكتب L على الشكل الاسي. د) بین ان L^{2008} عددا حقیقیا موجبا .

ه) استنتج طبيعة المثلث GAC .

حل التعرين 09

105

P(z)=0 حلا للمعادلة z_0 البات انه اذاكان و z_0 حلا للمعادلة (1 فان $\overline{z_0}$ حلا لها ايضا:

 $P(z_0) = z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7 = 0$ لدينا: $\overline{P(z_0)} = \left(\overline{z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7}\right) = 0$ $\overline{P(z_0)} = \overline{z}_0^3 - 3\overline{z}_0^2 + 3\overline{z}_0 + 7 = 0$ $P(\bar{z}_0) = \bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0^2 + 3\bar{z}_0 + 7$ $P(\overline{z}_0) = 0$ نإن : P(−1) بارحساب

 $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$ $P(z) = (z+1)(z^2 + az+b)$ نعين a وطحيث:

 $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ $= z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b$ $=z^{3}+(a+1)z^{2}+(b+a)z+b$

ج) حساب طویلة وعمدة للعدد المرکب علی الله و الله و عمدة للعدد المرکب
$$= \frac{-1 - (2 - i\sqrt{3})}{3 - (2 - i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \times \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

$$= \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{vmatrix} z_4 - z_c \\ z_6 - z_c \end{vmatrix} = \sqrt{3}$$

$$L = 3.e^{\frac{\pi}{2}} : \text{ such that } \text$$

$$L^{2008} = \sqrt{3}^{2008} e^{\frac{2008\pi}{2}i}$$

$$= \sqrt{3}^{2008} \left(\cos\frac{2008\pi}{2} + i\sin\frac{2008\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}^{2008} \left(\cos 1004\pi + i\sin 1004\pi\right)$$

$$= \sqrt{3}^{2008} (\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt{3}^{2008} = 3^{1004}$$

$$= GAC \text{ (a. 3. 1008)}$$

$$= GAC \text{ (b. 4. 2. 1008)}$$

$$= GAC \text{ (b. 4. 2. 1008)}$$

بها آن:
$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \sqrt{3}$$
 عناه:
$$CA = \sqrt{3}CG \text{ ومنه } |z_A - z_C| = \sqrt{3}|z_G - z_C|$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\left(\overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه: نستنتج أن المثلث GAC قائم في النقطة C

المال المالية نجد:
$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases} \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases} \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a = -4 \\ b = 7 \end{cases} \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$|P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \}$$

$$|P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \end{cases}$$

$$|P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \end{cases}$$

$$|z = -1 = (2\sqrt{3}i)^2 = 0$$

$$|$$

10

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

 Z_1 نرمز للحلين بالرمز . $Z^2 - (1+2i)Z - 1 + i = 0$

. و Z_2 حيث : Z_2 عدد حقيقي . $|Z_1| = |Z_1|$ عدد حقيقي . $|Z_1| < |Z_2|$

2) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,\vec{u},\vec{v}) .

لتكن B, A و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على

: حيث Z حيث العدد المركب $Z_2, Z_1, 1$

 $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$

 $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$: ليكن العدد المركب العدد المركب

 $e^{i heta}=\cos heta+i\sin heta$: انطلاقا من التعريف) ا

 $e^{i(heta_1+ heta_2)}=e^{i heta_1} imes e^{i heta_2}$: ومن الخاصية

 $rac{e^{i heta_1}}{e^{i heta_2}}=e^{i(heta_1- heta_2)}:$ برهن أن $e^{-i heta}=rac{1}{e^{i heta}}:$ برهن أن

-يث θ_2 ; θ_1 ; θ_2 أعداد حقيقية.

ب) أكتب Z على الشكل الأسي.

 ج) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته ونسبته.

حل التمرين 10 :

1) - حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$$Z^2 - (1+2i)Z - 1 + i = 0$$

 $\Delta = (1+2i)^2 - 4(1)(-1+i) = 1+4i-4+4-4i=1$ و منه المعادلة تقبل حلين متهايزين هما :

 $Z' = \frac{1+2i-1}{2} = i \quad Z'' = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$ $Z_{2} = 1+i \quad Z_{i} = i \quad |i|+||+||+||+||| ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{2}|| < ||Z_{1}|| < ||Z_{1$

: عدد حقيقي عدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ إثبات أن

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008} = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008} = \left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$
: لدينا

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} \left[\left(\cos 2008 \times \frac{\pi}{4} + i \sin 2008 \times \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008} = \frac{1}{2^{1004}} \in R$$

. و عليه فإن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي

 (O, \vec{u}, \vec{v}) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) .

B , A و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب

 $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1} C(1,1); B(0,1); A(1,0)$ C(1,1); B(0,1); A(1,0) C(1,1); B(0,1); A(1,0)

$$: \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}:$$
 أ) برهان أن $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}:$ أ

 $e^{-i\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$: لدينا

 $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$: وعليه فإن

 $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} imes \frac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} imes e^{-i\theta_2}$: من جهة أخرى

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1 - i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

ب) كتابة Z على الشكل الأسي:

$$Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1} = \frac{1 + i - 1}{i - 1} = \frac{i}{-1 + i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$
$$Z = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$Z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left(Z + \frac{1}{2}i\right)$$
 : المعرف بـ:

حل التمريين 11:

$$\Delta = (i)^{2} - 4 \times (-2 - 6i) : \frac{1}{2}$$

$$= -1 + 8 + 24i$$

$$= 7 + 24i$$

حساب جذر تربيعي لـ ∆ :

نبحث عن عددين حقيقيين X و ٧ حيث:

$$(x+iy)^2 = 7 + 24i$$

: تكافئ (x + iy)² = 7 + 24i تكافئ

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$$

بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة أن :

$$\left| \left(x + iy \right)^2 \right| = \left| 7 + 24i \right|$$

$$.x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$
 أي $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$ نستنج أن $.x^2 + y^2 = 25$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{25+7}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 : 0 \end{cases}$$
 اي أن : $2xy = 24$

و منه: x = 4 و y = 3.

$$z_2 = \frac{-i+4+3i}{2} = 2+i$$
 و $i3+4:\Delta$ جذر تربيعي لـ $2 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$ و $z_1 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$

ج) كتابة Z على الشكل المثلثي:

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$
لدينا

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$
 ومنه

استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته :

$$z_2 - 1 = z(z_1 - 1)$$
: و بالتالي $Z = \frac{Z_2 - 1}{Z_1 - 1}$: لدينا

$$z_2 - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] (z_1 - 1)$$
ېدن:

A مي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

التمرين 11:

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

- : Z حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول C : $C^2 + iZ 2 6i = 0$
- 2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

النقطتين B, A اللتين لاحقتاهما على الترتيب B, A اللتين لاحقتاهما على الترتيب Z_B, Z_A على

$$Z_B = -2 - 2i \ Z_A = 2 + i$$
 : الترتيب حيث

[AB] عين Z لاحقة النقطة ω مركز الدائرة

.
$$Z_c = \frac{4-i}{1+i}$$
 :حيث Z_c النقطة ذات اللاحقة (3

أكتب Z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة Z_c تنتمي

 (Γ) إلى الدائرة

 $M_0(Z_0)$ اً- برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(Z_0)$ و نسبته $H_0(Z_0)$ و زاويته $H_0(Z_0)$ و نسبته $H_0(Z_0)$

$$Z'-Z_0=Ke^{\theta}(Z-Z_0)$$
: هي $M'(Z')$ النقطة $M(Z)$

ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل Z

الأعداد المركبت والتحويلات النقطيت

 (Γ) المركز (Γ) للدائرة ((Γ) منتصف القطعة ((Γ)

$$z_{\omega} = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2 - 2i + 2 + i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

: على شكله الجبري z_c على شكله الجبري

$$z_{c} = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (٢) : يكفي أن نثبت

$$\omega C = \frac{AB}{2}$$
 ئ

 $\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 - 2i - i|}{2}$ $= \frac{|-4 - 3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}}{2}$ $= \frac{5}{2}$

$$\omega C = |z_c - z_\omega| = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

 (Γ) نستنتج أن النقطة Γ تنتمي إلى الدائرة

 M_0 تكون النقطة M' صورة لنقطة M' تختلف عن M_0 بالتشابه المباشر M_0 الذي مركزه M_0 إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} M_0 M' = k \times M_0 M \\ M_0 M, M_0 M' \end{pmatrix} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z' - z_0| = k \times |z - z_0| \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} : identified in the content of the$$

نستنتج أن العددين المركبين وت = = =

 $k(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ و $k(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$\frac{z'-z_0}{z-z_0} = k \times e^{i\theta}$$
 : e aix

$$z'-z_0=k\times e^{i\theta}(z-z_0)$$

نلاحظ أن لاحقة M كذلك تحقق هذه العلاقة.

ب/ التحويل 5 هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي $rac{\pi}{2}$. لاحقتها $rac{\pi}{2}$ أي $rac{\pi}{2}$ و زاويته $rac{\pi}{3}$.

التمرين 12

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

: کثیر حدود حیث P(Z)

و Z عدد مرکب $P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$

. P(Z)=0 على المجموعة C المعادلة (1

. $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ ، $Z_1 = 1 + i$: نضع (2

أ/ أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسى .

ب/ أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسى .

 $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ جر استنتج القيمة المضبوطة لكل من

 $. \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) n = 1 عدد طبيعي ، عين قيم n = 1 بحيث يكون العدد

. حقیقیا $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$

 $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ ب/ أحسب قيمة العدد

حل التعرين 12 :

: کثیر حدود حیث P(Z)

$$P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

$$\arg\left(\frac{Z_{1}}{Z_{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \ \ \ \ \ \ \ \frac{|Z_{1}|}{|Z_{2}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \text{a.s.}$$

$$= \frac{Z_{1}}{|Z_{2}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \cdot \frac{7\pi}{12}} : \text{a.s.}$$

$$= \frac{Z_{1}}{|Z_{2}|} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + \frac{1 + \sqrt{3}}{4} i : \text{a.s.}$$

$$= \frac{Z_{1}}{|Z_{2}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] : \text{a.s.}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} : \text{a.s.}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} : \text{a.s.}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{(Z_{1})^{n}}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^{n} \left(\sqrt{7\pi} \cdot n\right) ... \left(7\pi \cdot n\right) \right] : \text{a.s.}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left[\cos\left(\frac{7\pi.n}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi.n}{12}\right)\right] / 1 (3)$$

$$\sin\left(\frac{7\pi.n}{12}\right) = 0 : منیفیا معناه : \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$$

$$(k \in N) \quad \text{حیث } \frac{7\pi.n}{12} = k.\pi : \text{ otherwise support } \frac{7\pi.n}{12}$$

ومنه: $\frac{7n}{12} = k$ معناه: 7n من مضاعفات العدد 12 اي: n من مضاعفات العدد 12 لان (7و12 اوليان فيا بينها).

و
$$Z$$
 عدد مرکب : $P(Z) = 0$ المعادلة C عدد مرکب : $P(Z) = 0$ المعادلة C المجموعة C المحموعة C : C

$$S = \left\{1 + i \; ; \; 1 + i \sqrt{3} \; ; \; 1 - i \sqrt{3} \right\}$$
 : each of the solution $Z_1 = 1 + i$: $Z_2 = Z_1$ and $Z_1 = 1 + i$: each of $Z_1 = 1 + i$: eac

$$(\arg(Z_2) = \frac{-\pi}{3} \, |Z_2| = 2)$$
 ومنه $Z_2 = 1 - \sqrt{3} \, i$ ومنه $Z_2 = 2.e^{-i.\frac{\pi}{3}}$: ب/ الشكل الجبري :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

$$(\arg(Z_1) = \frac{\pi}{4} \quad |Z_1| = \sqrt{2}) : \text{ which it } |Z_2| = 2)$$

$$equation (arg $(Z_2) = \frac{-\pi}{3}, |Z_2| = 2)$$$

$$Z_{1} = 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) / (2$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_{1} = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{3}i} : \omega_{0}$$

$$Z_{2} = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_{2} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{3}i} : \omega_{0}$$

$$Z_{C} = \frac{1}{2} \left(5 + i\sqrt{3}\right), Z_{B} = 1 + i\sqrt{3}, Z_{A} = 1 - i\sqrt{3}/\psi$$

$$C\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(1; \sqrt{3}), A(1; -\sqrt{3}) : \omega_{0}$$

$$AB = \sqrt{(1-1)^{2} + (\sqrt{3} - (-\sqrt{3}))^{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\sqrt{3})\right)^{2}} = 3$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3})\right)^{2}} = \sqrt{3}$$

$$AC^2 + BC^2 = 12$$
 و $AB^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$: لدينا $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ومنه : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ حسب نظرية فيناغورث فإن المثلث ABC قائم في ABC

$$|Z| = \left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} / \Rightarrow$$

$$|Z_C - Z_B| = \left| \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{12 \times 20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} = \frac{1}{2^{228}}$$

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

المسنوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ المساوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(c; \vec{i}; \vec{j})$ المعادلة : $(c; \vec{i}; \vec{j})$ المعادلة : $(c; \vec{i}; \vec{j})$ المعادلة : $(c; \vec{i}; \vec{j})$ المعادلة . $(c; \vec{i}; \vec{j})$ مده المعادلة . $(c; \vec{i}; \vec{j})$

السمى المراكب ال

ب C ، B ، A هي النقط من المستوى التي لواحقها على $Z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $Z_A=1-i\sqrt{3}$. الترثيب : $Z_C=rac{1}{2}ig(5+i\sqrt{3}ig)$

 $(i^2 = -1)$ العدد المركب الذي يحقق $(i^2 = -1)$

أحسب الأطوال BC ، AC ، AB ثم استنتج طبيعة الثلث ABC .

ج/ جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث :

$$Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$$

د/ أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي Z^3 .

حل النعرين 13:

 $Z^{2} - 2Z + 4 = 0 (1)$ $\Delta' = (-1)^{2} - (1)(4) = -3 = (\sqrt{3}.i)^{2} :$ $Z_{1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1} = 1 - i\sqrt{3} :$ $Z_{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} = 1 + i\sqrt{3} :$

الدرين 14

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

نعتبر م م م م م (O, \vec{u}, \vec{v}) النقطتين A و B اللتين لاحقتيها على الترتيب $z_A = 3i$ و $z_A = 1 + i$ على الترتيب

. z_B و z_A : أكتب على الشكل الأسي

M التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة S

z' النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر δ.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه الماش C

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

A,2),(B,-2),(C,2) لتكن النقطة D مرجح الجملة. $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$

. D عين z_D لاحقة النقطة

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي ABCD.

عن B وعن A لتكن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها D ولتكن D مجموعة النقط D ذات اللاحقة D

التي يكون من أجلها $\frac{Z_B - Z}{Z_D - Z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

تتمي $z_E=6+3i$ ذات اللاحقة أن النقطة E تتمي

 (Δ) إلى

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ ، عين عندئذ المجموعة (Δ) .

حل التمرين 14:

 $rg(z_{_A})=rac{\pi}{4}$ الدينا $|z_{_A}|=\sqrt{2}$ الدينا .1 $z_{_B}=\sqrt{2}$ الدينا .1 $z_{_A}=\sqrt{2}e^{irac{\pi}{4}}$. و بالتالي: $z_{_B}=3e^{irac{\pi}{2}}$. بالتالي :

$$|Z_A - Z_B| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$|Z| = \left| \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} \right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$
:

•
$$arg(Z) = arg(Z_C - Z_B) - arg(Z_A - Z_B)$$

$$\arg(Z_C - Z_B) = \arg\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$arg(Z_A - Z_B) = arg(-2i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi_g$$

$$arg(Z) = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
:

. (عدد صحیح) .

$$Z^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \left[\cos 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{8} \left[\cos \pi + i\sin \pi\right] = -\frac{1}{8}$$

$$Z^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \left[\cos 6 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{64} \left[\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right] = \frac{1}{64}$$

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left[\cos 3k \left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3k \left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left[\cos k\pi + i\sin k\pi\right]$$

$$Z^{3k} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$$
: إذا كان k : إذا كان إ

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} : \text{if } i \in \mathbb{Z}$$

arg(2i)نسبة التشابه المباشر هو 2 = |2i| و زاويته هي (2i)أي $\frac{\pi}{2}$ و مركزه هو النقط ω التي لاحقتها π تحقق : $\omega = B$ و منه $z_0 = 2iz_0 + 6 + 3i$ ب) صورة النقطة A بالتشابه تحقق: $z_C = 2iz_A + 6 + 3i = 4 + 5i$

ج) كيا أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه B^{*} و زاويته ABC وهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم في $rac{\pi}{2}$ $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$ مرجح الجملة D مرجع الجملة أن D مرجع $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ فإن : $\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$. $z_D = 5 + 7i$: أي $z_D - z_A = z_C - z_B$ ب) في الرباعي \overrightarrow{ABCD} لدينا \overrightarrow{BC} و بالتالي فالرباعي متوازي أضلاع و بها أن ABC قائم في B فإن الرباعي ABCD مستطيل.

عدد الدينا $\frac{z_B - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3i - 6 - 3i}{5 + 3i - 6 - 3i}$ و هو عدد 1.4 . $E \in (\Delta)$ حقيقي موجب إذن

ب) عمدة العدد المركب $\frac{z_B - z_E}{z_D - z}$ هو قيس الزاوية $\cdot \left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MB} \right)$

: لدينا بعد وضع z = x + iy نجد أن يا بعد وضع $x^2 - 5x > 0$ مع $x \neq 5$ مع y = 3 تعني $z_B - z \in R_+^*$

 $[0,+\infty[$ أي مجموعة النقط (Δ) هي $x\in]-\infty,0[$ S(5,3) تقاطع المستقيم ذي المعادلة y=3 باستثناء النقطة مع المجموعة $]\infty+,5$ $[\,\cup\,]$ $0,\infty-[\,$ أي هي اتحاد نصفي $x \in]-\infty,0[\cup]$ المستقيمين 3y = 3 مع

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

: المعادلة C المعادلة المركبة C المعادلة ي، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي. $z^2-6z+18=0$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (٥:١١;١٠) لعتبر النقط D,C,B,A لاحقاتها على الترتيب

 $z_{D} = -z_{B}, z_{C} = -z_{A}, z_{B} = -\overline{z}_{A}, z_{A} = 3 + 3i$) بين أن النقط D,C,B,Λ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات

المركز () مبدأ المعلم.

ب) عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يجول النقطة

B إلى النقطة B.

D,O,B استقامية وكذلك النقط C,O,A استقامية

د) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

حل التعرين 15 :

ميز المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ هو 36 و بالتالي (1 فالعدد 61 هو أحد جذري المميز و منه : للمعادلة حلين 3+31 , 3-31 6

 $3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $3-3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Oا) لإثبات النقط D,C,B,A تنتمي إلى دائرة مركزها (2

 $OD = |z_D|$: حيث OD = OC = OB = OA : نبين أن

 $OA = |z_A|$ $OB = |z_B|$ $OC = |z_C|$ $OC = |z_C|$

 $|z_C| = |-z_A| = |z_A|$ و $|z_B| = |z_A| = |z_A|$ لدينا:

 $|z_D| = |-z_B| = |-\overline{z}_A| = |z_A| \quad \mathfrak{z}$

D,C,B,A أي أن النقط OD = OC = OB = OA

O تنتمي إلى دائرة مركزها

ب) زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B هي عمدة

العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ أي $\frac{3+3i}{-3-3i}$ أي -i و منه زاوية

الدوران هي $\frac{\pi}{2}$.

 $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = k\pi$: النقط C, O, A استقامية تعني أن

 $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = k\pi \text{ (s) } k \in \mathbb{Z}$

 $\frac{z_A}{z_C} = \frac{3+3i}{-3-3i} = -1$ Let 113

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_R - Z_A} = \frac{-4 + i + i}{2 + 3i + i} = \frac{-4 + 2i}{2 + 4i}$$

$$= \frac{-2 + i}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i}$$

$$= \frac{-2 + 4i + i + 2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

ب) تعيين طويلة وعمدة العدد المركب:

$$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad |i| = 1 \quad \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i : i$$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1 : i$$

$$= \frac{1}{2} \left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1 : i$$

- طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

را المميزة: z'=az+b التحويل z'=iz-1-i هو الدوران الذي مركزه z'=iz-i التحويل z'=iz-i هو الدوران الذي مركزه z'=iz-i هو الدوران الذي مركزه z'=iz-i هو الدوران الذي مركزه z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i التحويل z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i التحويل z'=iz-i هو النقطة z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i هو التحويل z'=iz-i

: استقامية D, C, A استقامية (أ (3

 $\overrightarrow{AC}(-4,2)$ ، $\overrightarrow{AD}(-6,3)$: وعليه D(-6,2) استفامية. أي $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$ استفامية. أي $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$ استفامية أي $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$ استفامية التحاكي \overrightarrow{A} الذي مركزه \overrightarrow{A} و يحول النقطة $\overrightarrow{AD} = \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{-6 + 2i + i}{-4 + i + i}$

 $= \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{3(-2+i)}{2(-2+i)} = \frac{3}{2}$

و منه
$$T$$
 = $-\pi$ استقامیة . T arg $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)$ = $-\pi$ استقامیة . T و بنفس الطریقة نبین استقامیة T . T استقامیة T . T .

د) طبيعة ABCD : من النتائج السابقة يتبين لنا قطعتا المستقيم [CA] و هما أقطار دائرة المستقيم (\overrightarrow{CA}) و هما أقطار دائرة فهما متقايسين و لدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن ABCD مربع .

الديرون (1/1

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس : \overline{C} , النقط C, B, A التي لاحقاتها على الترتيب : $z_C = -4 + i$ و $z_B = 2 + 3i$, $z_A = -i$. $z_C = -2A$ المشكل الجبري العدد المركب $\overline{z_B - z_A}$ و عمدة له، ثم ب) عين طويلة العدد المركب $\overline{z_C - z_A}$ و عمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل z' نقطة M ذات اللاحقة z' ذات اللاحقة z'=iz-1-i

أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

. $z_D = -6 + 2i$ لتكن D النقطة ذات اللاحقة (3

أ) بين أن النقاط D, C, A في استقامية.

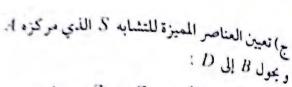
Cب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة D إلى النقطة D .

ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B

حل التمرين 16:

(1) أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $(1 + \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})$

114



$$a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = a(Z_B - Z_A):$$

$$a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-6 + 2i + i}{2 + 3i + i}$$

$$= \frac{-6 + 3i}{2 + 4i} = \frac{3i(1 + 2i)}{2(1 + 2i)} = \frac{3}{2}i$$

$$\arg\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
 و $|a| = \frac{3}{2}$: نام التشابه S مرکزه A و نسبته $\frac{3}{2}$ وزاویته $\frac{3}{2}$

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس التي الترتيب : $(O; \vec{u}; \vec{v})$ التي الترتيب ، النقط $(O; \vec{u}; \vec{v})$ $z_C = 4i$, $z_B = 3 + 2i$, $z_A = 3 - 2i$

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

1) أ) علم النقط C, B, A) علم

ب) ما طبيعة الرباعي OABC ؟ علَّل إجابتك. ج) عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC. 2) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي $|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 12$: 3) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات

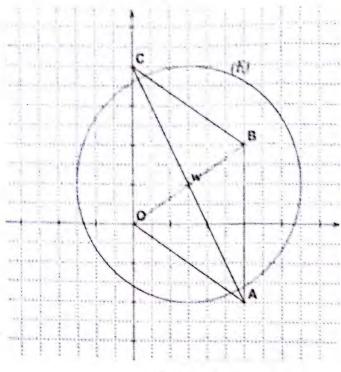
 z_1, z_0 نسمي $z^2 - 6z + 13 = 0$: image z_1, z_0 حلى هذه المعادلة.

ب) لنكن M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب ت. عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z-z_0| = |z-z_1|$$

حل التعريين 17

1) أ) تعليم النقاط:



ب) تعيين طبيعة الرباعي OABC:

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_O} = \frac{3 + 2i - 4i}{3 - 2i} = \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = 1$$
: $3 - 2i = 1$

فإن: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ و عليه الرباعي \overrightarrow{OABC} متوازي أضلاع.

تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي OABC:

$$Z_{\Omega} = \frac{Z_B + Z_O}{2} = \frac{3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

$$Z_{\Omega} = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

(E) تعيين و إنشاء المجموعة (E) :

(
$$E$$
) عِمْوعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$||\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = 12$$

بها أن Ω مركز الرباعي OABC يعني أن :

$$\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{O}$$

نان: 12 =
$$|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 12$$
 يعني ان

$$M\Omega = 3$$
 : اي = 12

و بالتالي (E) دائرة مركزها Ω و نصف قطرها E

حل التمرين 18:

(1) عموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0....(1)$ المجهول z التالية: $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0...(1)$ المجهول z التالية: $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0...(1)$ المجهول $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 4(\cos\alpha)z + 4$

$$z'' = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha \ z' = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$$
 $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 - i\sqrt{3}$: (2)
 $z_2 = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2i\sin\frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3} \ \alpha = \frac{\pi}{3}$

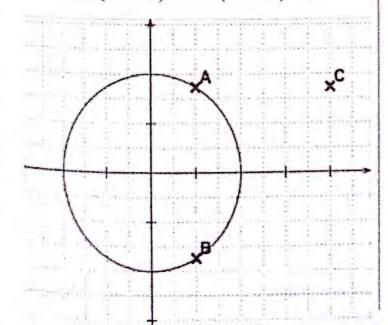
$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} \right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \cos\left(\frac{-2\pi \times 2013}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi \times 2013}{3}\right)$$

$$= \cos(1342\pi) - i\sin(1342\pi) = 1$$



3) أ) حل المعادلة ذات المجهول 2 :

$$\Delta = (-6)^2 - 4(13) = -16$$
 تعني: $Z^2 - 6Z + 13 = 0$
اي : $\Delta = (4i)^2$ و عليه المعادلة تقبل حلين هما :

$$Z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$
 $Z_0 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$

ب) تعيين مجموعة النقط
$$M$$
 من المستوي التي تحقق :
$$|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$$

AM = BM : تعني أن $|Z - Z_0| = |Z - Z_1|$ و بالتالي مجموعة النقط M هي محور القطعة [AB] أي محور الفواصل.

(بكالوريا علوم تجريبية 2013)

 حل في € مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0....(1)$$

$$z_1$$
 برمز إلى حلي المعادلة (1) ب $\alpha = \frac{\pi}{3}$ من أجل (2) من أجل من أجل من أجل المعادلة (1) برمز إلى حلي المعادلة (1) برمز

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم نتعامد

ومتجانس
$$(o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$
 النقط $(o; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ التي لاحقاتها: $z_0 = 4 + i\sqrt{3}$, $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$ $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$$z_{C}=4+i\sqrt{3}$$
 و $z_{B}=1-i\sqrt{3}$ $z_{A}=1+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

i) أنشئ النقط A ، C ، B ، A

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$
ب) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب ا $z_B - z_A$ في صورة B بالتشابه المباشر C الذي ثم إستنتج أن C

ثم إستنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

د) أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDG متوازي أضلاع.

) أنشئ النقط C ، B ، A انشئ

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$
 ب/ كتابة على الشكل الجبري العدد المركب

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر C الذي

مرکزه A ویطلب تعیین نسبته وزاویته:

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} (z_B - z_A)$$
 ومنه $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S(M) = M'$$
 و $z_M - z_A = a(z_M, -z_A)$: أي من الشكل

$$|\operatorname{arg}(a)| = \operatorname{arg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}i |a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
وبيا آن:

A وعليه S تشابه مباشر مركزه

$$|a| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
ونسبته

$$\theta = \arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$$
وزاویته:

: مرجح الجملة G مرجح الجملة ج

$$\{(A;1),(B;-1);(C;2)\}$$

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

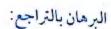
د) أحساب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي

ABCD متوازي أضلاع:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$$
 متوازي أضلاع معناه: \overrightarrow{ABDG}

$$z_D = z_G + (z_B - z_A) = 4$$
 ومنه $z_B - z_A = (z_D - z_G)$

المتتاليات العددية



مبدأ الإستدلال بالتراجع: لتكن P(n) خاصية متعلقة بمتغير طبيعي n و n عدد طبيعي معلوم. للبرهان على صحة P(n) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ نتبع الخطوات الآتية:

 $n = n_0$ من أجل P(n) من أجل (1) نتأكد من صحة الخاصية

2) نفرض الخاصية P(n) صحيحة من أجل عدد طبيعي p(n+1) كيفي p(n+1) .

إذا تحققت الخطوتين (1) و (2) فإن الخاصية P(n) تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge n$.

تمرين تطبيقيه 10

 $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر المجموع $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

- $.S_{5}$ $.S_{2}$... (1
- . S_n عين عبارة S_{n+1} بدلالة (2
- (3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ فإن:

وراحال

 $S_s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $S_2 = 1 + 2 = 3$ (1)

 $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) (2$

 $S_{n+1} = S_n + (n+1)$:

 $n \in N^*$ البرهان بالتراجع أنه من أجل (3

 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ نان

أ) نتحقق من الخاصية من أجل n = 1 لدينا:

(إذن الخاصية من أجل $S_1 = 1$ و $S_1 = 1$ (إذن الخاصية من أجل $S_1 = 1$

ب) نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن من

أجل الرتبة 1+n:

 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$: اي نفرض أن

 $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$: ونبرهن أن

 $S_{n+1} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

 $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n^2 + n}{2} + (n+1)$: لدينا $= \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$

 $=\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

. $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ فإن $n \in \mathbb{N}^*$ ومنه من أجل

Company of the State of the Sta

 $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$: is in the same is same in the s

 $S_3, S_2, S_1 \longrightarrow (1$

2) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n ثم برهن بالتراجع أنه من $S_n = n^2$ أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = n^2$

من جهة لدينا : $0 = (2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$ من جهة لدينا : $S_0 = 0^2 = 0$ ومنه الخاصية (P)

n المرتبة (P) محققة من أجل الرتبة $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$: أي : ونبر هن عليها من أجل الرتبة n+1 أي نبر هن أن:

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{6}n^2 + 3n + 1$$

الدينا:

محققة من أجل 0

$$S_{n+1} = 1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} + (n+1)^{2} = S_{n} + (n+1)^{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + (n+1)^{2} + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + n^{2} + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{3}n^{3} + \frac{13}{6}n^{2} + 3n + 1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$$

تذكير حول المتتاليات العددية:

1) تعريف: نسمي متتالية عددية، كل دالة لمجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها في مجموعة الأعداد الحقيقية.

نرمز لمتتالية عددية برموز من الشكل: (٧٫١) ١٠٠ (١٧٫١) ١٠٠٠. الخ.

2) اتجاه تغير متتالية عددية:

يعرف اتجاه تغير متتالية (u_n) بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1}-u_n$ العددية (u_n) :

र्शाद्यी

 $S_2 = 1 + 3 = 4$ $S_1 = 1$ $S_3, S_2, S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

: S_n بدلالة S_{n+1} عن S_{n+1} والتعبير عن (2)

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2(n+1)-1)$$

= $S_n + 2n + 1$

n البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = n^2$ (P_n) فإن $S_n = n^2$

: n=1 من أجل (P_n) من أجل \bullet

. لدينا: $S_1 = I^2$ أي : I = 1 وهذا صحيح

n نفرض الخاصية (P_n) صحيحة من أجل الرتبة $oldsymbol{\circ}$

n+1 ونبرهن عليها من أجل الرتبة $S_n = n^2$: أي $S_n = n^2$

 $S_{n+1} = (n+1)^2$ أي نبر هن أن:

 $S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ لذينا $S_n = n^2$ فإن: $S_n = n^2$ فإن: $S_n = n^2$

IS LANDERS

 $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$: علد طبيعي ، نضع n

 $S_2 S_5 - 1$ (1

: n فإن n فإن عدد طبيعي n فإن $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)$

शिखा

 $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$: S_2 , S_5 -1 $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

n فإن : البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $S_n = \frac{1}{6} n(2n^2 + 3n + 1)....(P)$

n=0 من أجل (P) من أجل : n=0

 $u_{n+1}-u_n>0$:متزايدة تماما إذا كان من أجل كل n فإن (u_n)

 $u_{n+1}-u_n<0$ متناقصة تماما إذا كان من أجل كل n فإن (u_n)

 $u_{n+1}-u_n=0$: ثابتة إذا كان من أجل كل n فإن (u_n)

3) المتنالية المحدودة من الأعلى:

عدودة من الأعلى إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد (u_n)

. $u_n \leq A$ عدد حقیقی ثابت A بحیث تکون

المتتالية المحدودة من الأسقل:

 (u_n) محدودة من الأسفل إذا كان من أجل كل n فإنه يو جد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون $u_n \ge A$.

4) المتالية المتقاربة:

نعريف 01: إذا كانت المتالية معرفة بحدها العام "الوكانت:

 (u_n) حيث l عدد حقيقي ثابت فإن المتتالية $u_n = l$

تكون متقاربة .

تعريف 02: إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة أو إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة.

ملاحظة: لإثبات أن متنالية (u_n) محدودة بالعدد A يمكن دراسة إشارة الفرق $A-u_n-A$ أو نبرهن بالتراجع $u_n=f(n)$ و إذا كانت $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة $u_n=f(n)$.

	المتالية الحسابية	المتنالبة افتاسية
تعريف	r / المات حقيقي. الم ثابت حقيقي.	» به ا به این حقیقی این مقبقی ا
عبارة الحذالعام	nr + u = u إذا كان الله هو الحد الأول.	" u, =u,×q إذا كان م لا هو الحد الأول.
	$u_n = u_p + (n-p)r$ وذا كان $u_n = u_p + (n-p)r$ من حدودها	" = ", ×q*" إذا كان ي لا حدا من حدودها.
هارة المجموع	$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$	$S_{n} = u_{0} + u_{1} + u_{2} + \dots + u_{n}$ $= u_{0} \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right) \cdot q \neq 1$
خاصبة ثلاث حدود متتابعة	a+c=2b	$a \times c = b^2$

6) نهاية متتالية هندسية:

الأول u_0 متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها qحدها العام:

 $\lim_{n\to +\infty}u_n=\infty$: فإن $u_0\neq 0$ و q>1 إذا كان: q>1 إذا كان: q>1 متباعدة.

ون کان: q=1 فإن المتالية q=1 نكون ثابتة $\lim_{n\to\infty}u_n=u_0$

(3) اذا كان: 1 < q < 1 فان: $0 = \lim_{n \to \infty} u_n = 0$ وتكون المتالية (u_n) متقاربة.

4) إذا كان: $q \le -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة وليست لها نهاية .

7) المتاليتان المتجاورتان:

(u_n) و (v_n) متتالیتان متجاورتان إذا تحقق ما یلی :

متزایدة و $\left(v_{n}\right)$ متناقصة (u_{n}) متزایدة

 $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \ (2$

: نظریة: إذا کانت (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن

حيث a عدد حقيقي ثابت $\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = a$

التمثيل البياني لحدود متنالية المعرفة بالعلاقة التراجع $u_{n+1} = f(u_n)$

 (u_n) التمثيل البياني للدالة fالمرفقة بالمتتالية (C_f) ننشئ (C_f) التمثيل البياني $M(u_n;u_{n+1})$ هي نقاط من (C_f) .

. y = x ننشئ المستقيم (Δ) الذي معادلته (2

. $M_0(u_0; u_1)$ نعين أول نقطة (3

نسقط $(u_0;u_1)$ على (Δ) وفق (Ox) فنحصل على نقطة A_0 .

وفق (Oy) فيحصل على النقطة (C_f) على (C_f) وفق $(M_1(u_1;u_2)$

وهكذا نكرر العملية فنحصل على جميع النقاط : ... ، M ₃ (u₂; u₃) ، M ₂ (u₂; u₃)

تمارين

التعرين 01

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} + (n+1)^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{6}n(2n^{2} + 3n + 1)\right) + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^{2} + 7n + 6) + n^{2} + 2n + 1$$

$$= \frac{1}{3}n^{3} + \frac{13}{6}n^{2} + 3n + 1$$

: ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} = \frac{1}{6}n(2n^{2} + 3n + 1)$$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)...... 03 + 13 + 23 + ... + n3 = \frac{n2 (n+1)2}{4}$$

: n = 0 من أجل P(n) من أجل •

$$0^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

n=0 ومنه الخاصية P(n) محققة من أجل 0=0

• نفرض أن من أجل الرتبة n أي:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

ونبرهن أن:

$$0^{3}+1^{3}+2^{3}+...+n^{3}+\left(n+1\right)^{3}=\frac{\left(n+1\right)^{2}\left(n+1+1\right)^{2}}{4}$$

لدينا: $0^3+1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

حار التعرين 10;

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)..(P)$ • نتحقق من الخاصية (P) من أجل n = 0: من جهة لدينا: $(P) \times (2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$ $0^2 = 0$

ومنه الخاصية (P) محققة من أجل n=0 . • نفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة n أي :

 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)..(P)$

ولبرهن عليها من أجل الرتبة n+1 أي نبرهن أن:

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} + (n+1)^{2}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^{2} + 3(n+1) + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^{2} + 7n + 6)$$

$$= \frac{1}{3}n^{3} + \frac{13}{6}n^{2} + 3n + 1$$

الترين 02

 $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_n=2u_n-3$

$$u_5; u_4; u_3; u_2; u_1 \leftarrow (1$$

- 2) أحسب $u_0 3$ و $u_1 3$ و $u_2 3 0$ و $u_0 3 0$ أعط تخمينا حول عبارة $u_n 3 0$ بدلالة u_n ثم برهن صحتها بالتراجع.
 - n استنتج عبارة u_n بدلالة (3

حل التمرين 02:

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$
 (1
 $u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$
 $u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$
 $u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$
 $u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$
 $3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$: الدينا (2
 $3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$
 $3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$
 $3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$
 $3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$
 $3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$

نستنتج أن: $u_n = 2^n$ ولنبرهن هذه الخاصية بالتراجع: $u_n = 2^n$ لأن: $u_0 = 2^0$ لأن: $u_0 = 2^0$ أي: $u_0 = 2^0$

نفرض أن $u_n = 2^n$ من أجل الرتبة n ونبرهن على صحة الخاصية من أجل الرتبة n+1 أي نبرهن أن: $3-u_{n+1}=2^{n+1}$

$$3-u_{n+1} = 3-(2u_n-3) = 6-2u_n$$

$$= 2(3-u_n) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$
122

 $0' + 1' + 2^{3} + ... + n^{3} = \frac{n^{2} (n+1)^{2}}{4}$ $0'' + 1'' + 2^{3} + ... + n^{3} + (n+1)^{3} : 3$ $= (n^{3} + 1)^{3} + ... + n^{3} + (n+1)^{3} : 3$ $= \frac{n^{2} (n+1)^{2}}{4} + (n+1)(n+1)^{2}$ $= (n+1)^{2} \left(\frac{n^{2}}{4} + n + 1\right)$ $= (n+1)^{2} \frac{n^{2} + 4n + 4}{4} = (n+1)^{2} \frac{(n+2)^{2}}{4}$ $= \frac{(n+1)^{2} (n+1+1)^{2}}{4}$ $= (n+1)^{2} \frac{(n+1)^{2} (n+1+1)^{2}}{4}$ $= (n+1)^{2} \frac{(n+1)^{2} (n+1+1)^{2}}{4}$ $= (n+1)^{2} \frac{(n+1)^{2} (n+1+1)^{2}}{4}$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي ١١ فإن:

$$10^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

3) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
 : as $n = \frac{1}{3}$

 $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(2)(3) = 2$ من أجل n=1 لدينا n=1

$$n=1$$
 إذن: الخاصية محققة من أجل $t_1=2$

nا من أجل $t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ من أجل ا

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$
 هل

لدينا:

$$t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n (n+1) + (n+1)(n+2)$$
$$= t_n + (n+1)(n+2)$$

 $t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ حسب الفرضية لدينا:

$$t_{n+1} = (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$

إذن: الخاصية صحيحة من أجل ١+١

نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$t_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

 $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20} : e^{-1} \cdot (4)$ $S = \frac{20 - 0 + 1}{2} \cdot (u_0 + u_{20}) = \frac{21}{2} (-3 + 37) = 357$ $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n : e^{-1} \cdot (5)$ $S_n = \frac{n - 0 + 1}{2} \cdot (u_0 + u_n)$ $= \frac{n + 1}{2} (-3 + -3 + 2n)$ = (n + 1)(-3 + n)

النمرين 04:

: متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث $(u_n)_{n\in N}$ $u_3+u_5=20$ و $u_1=1$. أو جد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها .

 $u_1 + u_2 u_n$: المجموع (2) أحسب بدلالة n المجموع (2) أحسب بدلالة العددية (v_n) المعرفة كما يلي $v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$

 $u_1^2 + u_2^2 \dots + u_n^2$ (3) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم أحسب المجموع S_n حيث S_n

حل التمرين 04 :

 (u_n) إيجاد أساس المتتالية (u_n)

 $u_n = u_p.q^{n-p}$ الدينا: $u_3 + u_5 = 20$ ونعلم أن $u_3 = u_1.q^2$ ومنه $u_3 = u_1.q^2$ ومنه: $u_1.q^2 + u_1.q^4 = 20$ ومنه: $u_1.q^2 + u_1.q^4 = 20 = 0$ أي $u_2 + u_3 = 0$ حيث $u_3 = u_1.q^2 + u_3 = 0$ انتحصل على : $u_3 + u_3 = 0$ أي $u_3 + u_3 = 0$ او $u_3 + u_3 = 0$ ومنه: $u_3 + u_3 = 0$ أي $u_3 + u_3 = 0$ او $u_3 + u_3 = 0$ أي $u_3 + u_3 = 0$ او $u_3 + u_3 = 0$

103

 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r ، حدها الرابع يساوى x و حدها الحامس يساوي x .

- ر الأول r و حدها الأول μ_0 الأول μ_0)
- 2) اكتب عبارة الحد العام "١١ بدلالة ١١ .
- 3) على العدد 37 حدا من حدود المتتالية (١١١) ، إذا كان حدا ما رتبته .
- $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ (4)
- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$: (5) أحسب المجموع: n بدلالة n

حل التمريين 03 :

 u_0 إيجاد الأساس r و حدها الأول $^{(1)}$

لدینا: حدها الرابع یساوی 3 معناه: $u_3=3$ و حدها الخامس یساوی 5 معناه: $u_4=5$.

. ونعلم أن : $r : u_4 = u_3 + r$ لأن (u_n) متتالية حسابية

 $r = u_4 - u_3 = 5 - 3 = 2$:

 $3 = u_0 + 6$: ولدينا $u_3 = u_0 + 3.r$ ولدينا

 $u_0 = -3$

 $u_n = u_0 + n.r : n$ عبارة الحد العام u_n بدلالة $^{(2)}$

 $u_n = -3 + 2n$

-3 + 2n = 37 نضع: 37 = 37 ومنه n = 20

ومنه: القيمة 37 حدا من حدود المتتالية (١١) حيث

21 ورتبته 21 ₂₀ = 37

ومنه: 4 = q^2 ومنه q=2 لأن: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة).

وتحدید اتجاه تغیر المتتالیة (u_n) : بها أن (u_n) متتالیة هندسیة حدودها موجبة و q=2>1 فإن (u_n) متزایدة.

 $: u_1 + u_2 \dots u_n : المجموع (2)$ حساب بدلالة n المجموع

$$u_1 + u_2 + \dots = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

 $u_1^2 + u_2^2 + u_n^2 + u_n^2 = S_n$ حساب بدلالة n المجموع S_n حساب بدلالة S_n

$$u_1^2 + u_2^2 + u_n^2 = u_1^2 + (u_1 q)^2 + (u_1 q)^2 + \dots + (u_1 q^{n-1})^2$$

$$= u_1^2 \left(1 + \left(q^2 \right)^1 + \left(q^2 \right)^2 + \dots + \left(q^2 \right)^{n-1} \right) = u_1^2 \left[\frac{\left(q^2 \right)^n - 1}{q^2 - 1} \right] = \frac{4^n - 1}{3}$$

 $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ حساب المجموع $S_n = S_n$ حيث $v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$ و

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

= $(3 \cdot u_1^2 + 2 \cdot 3^1) + (3 \cdot u_2^2 + 2 \cdot 3^2)$
+ $\dots 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$

$$=3\left(u_1^2 + u_2^2 \dots + u_n^2\right) + 2\left(3^1 + 3^2 + \dots + 3^n\right)$$
$$=4^n - 1 + 2\frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 4^n + 3^{n-1} - 2$$

العرين 05:

: کما یلي N متتالیة عددیة معرفة علی N کما یلي (u_n)

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$
, $u_0 = 0$

1) أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

. متزايدة تماما (u_n) متزايدة تماما $0 \le u_n \le 1$

 $v_n = u_n - 1$: لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي (2 $v_n = u_n - 1$) متتالية هندسية .

 u_n عبر عن v_n بدلالة u_n ثم u_n بدلالة u_n

. ٧_n عين نهاية ال و ٧،

(3) أحسب بدلالة n المجموعين: Y_n و N_n حيث: $N_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $N_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

حل التمرين 05

n البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

: n = 0 نتحقق من الخاصية من أجل •

. وهذا محقق $0 \le 0 \le 1$ أي $0 \le u_0 \le 1$

• نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل الرتبة n+1:

 $0 \le u_{n+1} \le 1$ ونبرهن أن $0 \le u_n \le 1$ أي نفرض أن $0 \le u_n \le 1$ أي نفرض أن $0 \le u_n \le 1$ الدينا $0 \le u_n \le 1$ لدينا $0 \le u_n \le 1$ الحدد نحصل على: $0 \le \frac{2}{3}u_n \le \frac{2}{3}$ (نضيف للمتباينة المضاعفة العدد $\frac{1}{3}$)

$$rac{1}{3} \leq rac{2}{3}u_n + rac{1}{3} \leq 1$$
 : نحصل على : $0 \leq rac{1}{3}$: نحصل على : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$: ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$: ومنه :

2) إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - u_n$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)u_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(u_n - 1)$$

 $u_n-1 \le 0$: وبها أن : $u_n \le 1$ (من السؤال 2) ومنه

 $u_{n+1} - u_n \ge 0$: $0 \ge \frac{-1}{3}(u_n - 1) \ge 0$:

 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right] = 1 \text{ (} |q| \le 1 \text{ if })$

 $S_n = Y_n : M_n + M_n + M_n = M_n + M_n$

$$Y_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
: لدينا

$$=-1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = -3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1)$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= Y_n + n + 1$$

التحرين 06

متتالية معرفة على N بـ: $u_0=1$ و من اجل كل عدد (u_n)

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} : n$$
 طبيعي

 $. u_2, u_1 + -1$

nعدد حقیقی غیر معدوم،من اجل کل عدد طبیعی lpha

 $v_n = u_n + \alpha$: نضع

($v_{_{n}}$) عين قيمة العدد α التي تكون من اجلها المتتالية (α

 $\frac{1}{2}$ هندسية أساسها

ب) عبر عن "u بدلالة n.

 u_{n} أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_{n}).

1-4- أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

 $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n}$ = (...)

اي: (u_n) متزايدة تماما.

 $\lim_{n\to+\infty}u_n=L:$ فرض المتتالية متقاربة أي (3

(حيث L عدد حقيقي ثابت)

 $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = L$: لدينا ((u_n)) ايجاد نهاية المتتالية

 $L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}$:

L=1: $=\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}L:$ $=\frac{2}{3}L-L$

$$S_n = -3 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] + n + 1 : a_n$$

 (v_n) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كها يلي: من أجل كل عدد

 $v_n = u_n - 1 : n$ division division di divisioni di di divisioni di divisio

إثبات أن المتتالية (٧٫) هندسية يطلب أساسها و حدها الأول:

 $v_{n+1} = v_n \times q$:متالية هندسية إذا تحقق ما يلي متالية هندسية

(q) عدد حقیقی ثابت)

 $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1$ Levil:

$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$$

 $q=rac{2}{3}$: ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها

وحدها الأول: 1 = 1 = 0 - 1 = -1 . وحدها الأول

: n عبارة u_n و v_n بدلالة u_n

 $v_n = v_0 q^n$: با أن (v_n) متتالية هندسية فإن

$$v_n = -1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
:

 $u_n = v_n + 1$: ولدينا: $v_n = u_n - 1$

$$u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 : \emptyset$$

 $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}-\left(\frac{2}{3}\right)^n=0:v_n\ \ u_n\ \ u_n$

حل التمرين 06:

$$u_2 = \frac{u_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$
 $u_1 = \frac{u_0 - 1}{2} = 0$ (1)

: نضع
$$n$$
 نضع اجل کل عدد طبیعي $lpha
eq 0$ (2

$$v_n = u_n + \alpha$$

أ) قيمة
$$\alpha$$
 التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$$
 alies $\frac{1}{2}$ hall with (v_n)

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{u_n - 1}{2} + \alpha = \frac{u_n - 1 + 2\alpha}{2}$$

تكون
$$(v_n)$$
 مندسية أساسها تكون $v_{n+1} = \frac{u_n + \alpha + (\alpha - 1)}{2}$

$$\alpha = 1$$
 افا و نقط إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\frac{1}{2}$

$$v_n = v_0 q^n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
 is $u_n = v_0 q^n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$v_0 = u_0 + 1 = 2$$
 $u_n = v_n - 1$ خان $v_n = u_n + 1$ خان

$$u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

 $: (u_n)$ انجاه تغیر (3

$$u_{n+1} - u_n = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

N ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n : s_n = 0$$

$$s_n = (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)$$
 sizes

$$s_n = v_0 \times \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1(n+1)$$

$$s_n = -4 \times \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] - 1(n+1)$$

 $s_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n + 3$ e also

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$
و $-1 < q < 1$ کن
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n} = -1$$

العبرين 0.7

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$
 : با N متتالیة معرفة علی (u_n)

المثالية ثابتة. (u_n) عين العدد الحقيقي a بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة. $(D;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم ب أرسم في معلم متعامد و متجانس y=x و المنحنى (D) المثل للدالة (Δ)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$
: المعرفة على R المعرفة

ج) نضع : a=0 باستعمال الرسم السابق مثل على حامل u_3 , u_2 , u_1 , u_0 عور الفواصل و بدون حساب الحدود $v_n=u_n-2$: $v_n=u_n-2$ بعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $v_n=u_n-2$ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

: حيث $L_n = S_n$ المجموعين $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ المجموعين $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ و $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ب المجداء $P = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_9$: حيث $P = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_9$

حل التمرين 07:

 $u_{n+1} = u_n = \dots = u_1 \neq u_0$ متتالية ثابتة معناه (u_n) (أ (1 $u_0 = \frac{-1}{2}u_0 + 3$ تكافئ $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 3$ ومنه $u_0 = 2 = a$ بن رسم $u_0 = x$ و المنحنى $u_0 = x$ المعرفة $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. . . $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

المتتاليات العدديت

$$s_n = (-2) \times \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1}$$
 size

$$s_n = \frac{4}{3} \times \left[\left(\frac{-1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right]$$

 $L_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$: حيث n بدلالة n بدلالة n

$$L_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$
 axis

$$L_{n} = \frac{4}{3} \times \left[\left(\frac{-1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] + 2n + 2 \text{ if } L_{n} = S_{n} + 2(n+1)$$

$$L_n = \frac{4}{3} \times \left[\left(\frac{-1}{2} \right)^{n+1} \right] + 2n + \frac{2}{3} \quad \text{and} \quad$$

 $P = v_0 \times v_0 q \times \times v_0 q^9$: حيث $P = v_0 \times v_0 q \times \times v_0 q^9$

$$0+1+2+....+9$$
) $P=v_0^{10}q^{0+1+2+....+9}$

مج متتالية حسابية) .

$$P = (-2)^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^{45}$$

$$P = (-2)^{10} (-)^{-45} = (-2)^{-35}$$
 each

التمرين 08:

: بالعبارة I=[1;4] بالعبارة :

$$f(x) = \frac{6x - 4}{x + 1}$$

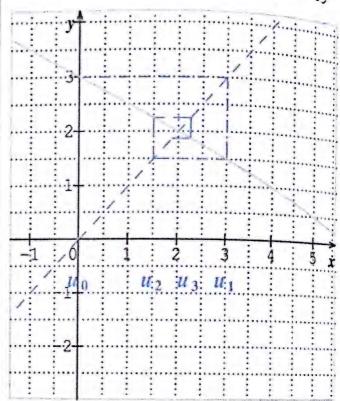
ادرس تغيرات الدالة f و استنتج انه من اجل كل عدد -1

. $f(x) \in I$ فان x من المجال من المجال

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

ج) نضع : $u_0 = 0$ الحدود $u_0 = u_1, u_2, u_3, u_2, u_3$ على حامل عور الفواصل .



 $v_n = u_n - 2$: نعتبر (2

$$v_{n+1} = qv_n$$
 متتالية هندسية معناه (v_n) (أ

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$$

$$v_0 = u_0 - 2 = -2$$
 $q = -\frac{1}{2}$

$$v_n = v_0 \times q^n$$
 ب بدلالة $v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = -2 \times (\frac{-1}{2})^n$$

 $u_n = v_n + 2$ فان $v_n = u_n - 2$ فان : n بدلالة u_n

$$u_n = -2 \times (\frac{-1}{2})^n + 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+2:$$
 منقاربة (u_n) (ج

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 0$$
, $-1 < q < 1$

$$s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
: حيث $n = n$ بدلالة n بدلالة n بدلالة n

أ) باستعمال (C_{i}) منحنى الدالة f والمستقيم (D) ذو المعادلة y=x مثل على محور الفواصل الحدود u_{1},u_{0},u_{1} (دون حسابها) .

﴿ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية ﴿ ﴿ سُمَا لَاللَّهِ أَلَّهُ اللَّهُ اللَّا اللَّهُ اللَّا اللَّهُ اللَّا اللّاللَّالِمُ اللَّالَّالِمُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ اللَّهُ

ا ب كبر هن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

 $1 \le u_n \le 4$

ج) بين أن (u_n) متزايدة تماما استنتج أنها متقاربة .

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$$
: عتبر المتتالية (v_n) المعرفة N بـ: -3

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

 u_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة v_n

ج) عبر بدلالة بدلالة
$$n$$
 عن المجموع S_n حيث:

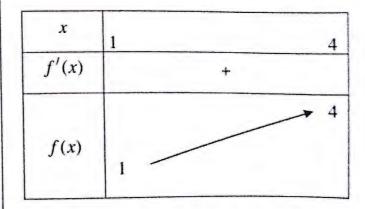
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

حل التعرين 08 :

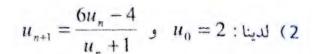
1) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال I و لدينا :

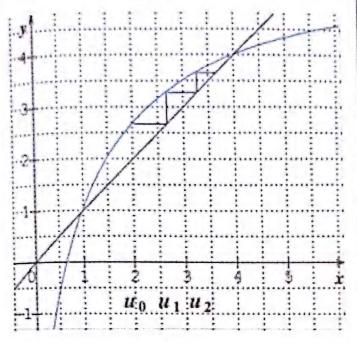
$$f'(x) = \frac{6+4}{(x+1)^2} = \frac{10}{(x+1)^2}$$

بها أن f'(x) > 0 فان الدالة f متزايدة تماما على المجال f'(x) > 0 و لدينا :



من جدول تغیرات الدالة f ستنتج انه من اجل كل عدد حقیقی x من المجال I فان $f(x) \in I$.





. التخمين: (u_n) متتالية متزايدة تماما *

: n عدد طبيعي n البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $1 \le u_n \le 4$

 $1 \le 2 \le 4$ من اجل n = 0 من اجل من اجل

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n + 1} : (u_n) (x_n)$$
 (ح.)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}$$

$$u_n - 1 \ge 0$$
 و $u_n - 4 \le 0$ بها أن

فإن:
$$0 \le \frac{-(u_n-1)(u_n-4)}{u_n+1}$$
 وبالتالي (u_n) متزايدة غاما.

بها أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

معناه q متتالية هندسية أساسها q معناه (v_n) أ

$$q = \frac{2}{5}$$
 ومنه (v_n) م هـ أساسها $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 1} = -2$

$$3276 = 78(a-b+c)$$
 : أي: $a-b+c = 3276/78$ أي: $a-b+c = 3276/78$ $a+b+c = 78.....(1)$ لدينا إذن الجملة $a-b+c = 42.....(2)$

b=18 : (1) نحصل على: 2 b=36 أي: 18 المحرح (2) من (1) نحصل على: 2 b=18 أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k\in IR$ ليكن a=b/k=18/k لدينا a=b/k=18/k=18 و a=b/k=18/k=18 إذن المساواة (1) تصبح: 78

 $18+18k+18k^2=78k$: أي k : أي k : أي k نضرب الطرفين في k : أي k : أي k : k

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

a=18/3=6 $c=18\times 3=54$: لنحتار مثلا: k=3 إذن k=3 إذن k=3 إذن k=3 إذن k=3 إذن k=6 k=18+54=42 أن من أجل k=1/3 نحصل على k=1/3 و k=54 و k=54

خلاصة: الأعداد المطلوبة هي:

(a;b;c) = (54;18;6) (a;b;c) = (6;18;54)

التمرين 10:

: متتالية هندسية متناقصة حيث (u_n) متتالية

 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84$ $u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$

. أحسب الحدود : u_1 ثم u_1 ; u_3 والأساس u_4 للمتتالية (1

 $(u)_{n=N}$ عبر عن u_n بدلالة n وأدرس تقارب المتتالية u_n عبر 2

3) أحسب بدلالة n المجموع كحيث:

 $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع 'S حيث:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{2}{5}\right)^n$$
 : n بدلاله v_n (ب $u_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 1}$ فان $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$ ناله

$$u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 4}{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}$$
 at $\frac{1}{3}$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = -2 \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{10}{3} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 \right]$$

$$\downarrow \uparrow$$

التعرين 09:

أعداد حقيقة غير معدومة c;b;a

1) بين أن إذا كانت c; b; a جهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

 $a^{2}+b^{2}+c^{2}=(a+b+c)(a-b+c)$

 2) أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276.

حل النعريين 09

 $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+2ac-b^2+c^2$ لدينا: (1) لدينا: c ; b ; a من متتالية إذا كانت c ; b ; a بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية a c = b أمندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا: $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+2b^2-b^2+c^2$ ومنه: a = $a^2+b^2+c^2$

2) لتكن c; b; a بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة إذن:

$$a+b+c=78$$

 $a^2+b^2+c^2=3276$
الكن حسب السؤال (1) فإن:

 $a^{2}+b^{2}+c^{2}=(a;b+c)(a-b+c)$

2) التعبير عن ١١ بدلالة ١١:

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

: $(u)_{n \in N}$. Example 1.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$
 وعليه فإن المتتالية $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ (3) أحسب بدلالة $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - (2)^n}{1 - 2} = -2[1 - (2)^n]$$

4) حساب بدلالة n المجموع 'S:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 \cdot q} + \frac{1}{u_1 \cdot q^2} + \dots + \frac{1}{u_1 q^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{u_1} \left[\frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{q} \right)^{0} + \left(\frac{1}{q} \right)^{1} + \left(\frac{1}{q} \right)^{2} + \dots + \left(\frac{1}{q} \right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{q} \times \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{1 - \frac{1}{q}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n}$$

متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها (u_n)

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases} : q$$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد

حل التعرين 10:

 (u_n) عساب الحدود (u_n) ثم (u_n) والأساس (u_n) للمتالية (u_n) لدينا: $u_1 \times u_2 \times u_3 = 64.....(1)$ ولدينا

خاصية الوسط الهندسي على الحدود $u_1; u_2; u_3$ فإن:

$$u_2^2 = u_1 \times u_3$$

 $u_2 = 4$: وعليه تصبح العلاقة (1): 64 = $u_2^3 = 64$

$$\begin{cases} u_1.u_2.u_3 = 64 & \text{: tu, } u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1.4.u_3 = 64 \\ u_1^2 + 16 + u_3^2 = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 u_3 = 16 \\ u_1^2 + u_3^2 = 68 \end{cases}$$

 $u_1 = \frac{16}{u_1}$ فإن: $u_1 \times u_3 = 16$ من المعادلة

$$u_1^2 + u_3^2 = 68$$
 is its in u_1 is u_2 is u_3 is u_4

 $\frac{256 + u_3^4}{u_3^2} = 68$ نجد: $\frac{256}{u_3^2} + u_3^2 = 68$ نجد:

 $x = u_3^2$: نضع: $u_3^4 - 68u_3^2 + 256 = 0$

 $x^2 - 68x + 256 = 0$

 $x_2 = 64$ أو $x_1 = 4$: نجد کنین کا المیز کا نجد

$$x_2 = 64 \text{ u} \bullet$$
 $x_1 = 4 \text{ u} \bullet$

$$u_3^2 = 64$$
: $u_3^2 = 4$: $u_3^2 = 4$:

$$u_3 = 8$$
 (e.i.e.) $u_3 = 2$

 $u_2 = 4$ بها أن (u_n) متتالية هندسية متناقصة و

$$u_1 = \frac{16}{u_2} = 2$$
 و $u_3 = 8$ فإن

$$q = \frac{u_2}{u_1} = 2 : q \quad \text{and} \quad q = \frac{u_2}{u_1$$

130 الأول الله ...

 $u_2 = u_1 q : q$ حساب الأساس $q = \frac{u_2}{u} = \frac{6}{2} = 3$: $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} / \omega$ $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n /$ $=u_1 \times \frac{q^n-1}{a-1} = 3^n - 1$ $3^n - 1 = 728$ أي $S_n = 728$ تعيين n حيث $S_n = 728$ $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$: ومنه $3^n = 729$ $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n + u_n$ y $v_1 = 2$ (2) $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5 : v_3 = v_2$ $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$ $w_n = \frac{v_n}{u} - \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ $w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$ $=\frac{3v_n+2u_n}{6u_n}-\frac{2}{3}=\frac{3v_n+2u_n-4u_n}{6u_n}$ $= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right)$ $=\frac{1}{2}W_n$ ومنه : (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ / $w_n = \frac{v_n}{u} - \frac{2}{3} : n$ عبارة v_n بدلالة $v_n = w_n u_n + \frac{2}{3} u_n$ $v_n = \left(w_n + \frac{2}{3} \right) u_n$: $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$ each 131

 u_n بارة الحد العام u_n بدلالة u_n $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n : 2 \sim S_n - 1/2$. $S_n = 728$: يكون العدد الطبيعي n بحيث يكون (v_n) متنالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير (v_n) $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$ $v_1 = 2$: معدوم کما یلی . V₃ و V₂ أحسب أ ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ ين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n

. $(u_2)^2 = u_1 \times u_3$ أ بيا أن (u_n) متتالية هندسية فإن (1 . $u_2 = 6$: أي $(u_2)^3 = 216$ $\int u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$ $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ $\begin{cases} u_1 + 2 \times 6 + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20....(1) \\ u_1 \times u_3 = 36...(2) \end{cases}$ $u_3 = 20 - u_1$: (1) من $u_3 = 20 - u_1$ في $u_1(20-u_1)=36$ $-u_1^2 + 20u_1 - 36 = 0$ $u_1 = 18$. $u_1 = 2$ مرفوض لأن (سير ايدة تماما . $u_3 = 20 - 2 = 18$ فإن $u_1 = 2$ لا غان

$$u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - e^n = e^n (e-1) > 0$$

. متتالية متزايدة (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{n+1}=+\infty:$$
 ولدينا: (u_n) متتالية متباعدة

$$S = u_1 + u_2 + \dots u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
 (3)
$$= e^2 \cdot \frac{e^n - 1}{e - 1} = \frac{e^2}{e - 1} (e^n - 1)$$

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

: متتالية حسابية (v_n) أ/ إثبات أن (4

: متتالية حسابية إذا تحقق مايلي (v_n)

(حیث
$$v_{n+1} = v_n + r$$

$$v_{n+1} = 3\ln(u_{n+2}) - \ln u_{n+1}$$

$$= 3\ln(e \cdot u_{n+1}) - \ln(e \cdot u_n)$$

$$= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

$$= 3 \ln e + 3 \ln u_{n+1} - \ln e - \ln u_n$$

$$= 2 \ln e + 3 \ln u_{n+1} - \ln u_n = v_n + 2$$

$$r=2$$
 ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها

$$S_n = v_0 + v_1 ... + v_{n-1} = \frac{n-1-0+1}{2} (v_0 + v_{n-1}) / v_n$$

$$v_0 = 3 \ln u_1 - \ln u_0 = 3 \ln e^2 - \ln e$$
 :

$$=6\ln e - \ln e = 5\ln e = 5$$

$$v_{n-1} = v_0 + (n-1) \cdot r = 5 + (n-1)2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(5+5+(n-1)2) = n(5+(n-1))$$
:

النمرين 13

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان في كل حالة من الحالات التالية:

(u_n) و (v_n) متتالیتان معرفتان من أجل کل عدد طبیعي (u_n)

$$v_n = 3 - \frac{5}{n}$$
 $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$: $u_n = 3 + \frac{5}{n}$

ليبرين 12

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث:

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$$
 $\ln u_3 + 2 \ln \sqrt{u_6} = 11$

.
$$u_0$$
 عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول (1

نم أدرس اتجاه تغير وتقارب المتتالية
$$u_n$$
 بدلالة u_n ثم أدرس u_n).

.
$$n$$
 بدلالة $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة (3

ب:
$$N$$
 متتالية عددية معرفة على N ب

$$v_n = 3 \ln u_{n+1} - \ln u_n$$

أر أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع:

$$S_n = v_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

حل التمريين 12

: u_0 عين أساس المتالية (u_n) وحدها الأول (1

$$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$$
 و $\ln u_3 + 2 \ln \sqrt{u_6} = 11$: لدينا

$$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$$
 $\ln u_3 + 2 \times \frac{1}{2} \ln u_6 = 11$ $\ln u_6 = 11$

$$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1 \quad \text{o} \quad \ln(u_3 \cdot u_6) = 11$$

$$\frac{u_3}{u_2} = e$$
 ومنه: $u_3 \times u_6 = e^{11}$ ومنه:

$$(u_n)$$
 معناه: $q=e$ أساس المتتالية

$$u_0 \cdot q^3 \cdot u_0 \cdot q^6 = e^{11}$$
: ولدينا : $u_3 \times u_6 = e^{11}$

$$u_0 = e$$
: ومنه $u_0^2 = e^2$: ين $u_0^2 \cdot e^9 = e^{11}$ ومنه

(
$$u_n$$
) متتالية هندسية حدودها موجبة تمام)

$$u_n = u_0 \cdot q^n = e \cdot e^n = e^{n+1} : n$$
 عبارة u_n بدلالة u_n عبارة (2) عبارة اتجاه تغیرات (u_n)

$$= \frac{n+2n(2n+1)-2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

$$= \frac{n+2n(2n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

(إذن: $0 - v_{n+1} - v_n$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما)

 $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n} \right) - u_n = 0$ ولدينا أيضًا

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية $\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{or} \quad \text{arison}$

إذن: حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

ومن أجل $v_0 = 2 \,! \, u_0 = -1$ ومن أجل متتاليتان معرفتان بـ $(v_n) = 2 \,! \, u_0 = -1$ $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$: n كل عدد طبيعي $u_n < v_n : n$ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي (1) برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان. $x_n = u_n + av_n$ نضع : من أجل كل عدد طبيعي n نضع

و معددان حقیقیان متایزان. $y_n = u_n + bv_n$ و عددان

 (y_n) و (x_n) و المتتاليتان (x_n) و (3 y_n y_n .n بدلالة

 (v_{π}) و (u_{π}) أو جد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_{π}) و (4

حل التمرين 14

 $u_n < v_n$: البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي 1) البرهان بالتراجع من أجل n = 0 إذن الخاصية $u_0 < v_0 : n = 0$ n=0 عققة من أجل

2)(۱٫۱) و (۲٫۱) متتالیتان معرفتان من اجل کل عدد طبیعی $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} : n$ $\exists x_n \text{ ascept} n$ $\exists x_n \text{ ascept} n$ $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

حل التمريين 13 :

 $(-1)^n$ لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد (1 موجب إذا كان n زوجي وسالب إذا كان n فردي وعليه فالمتاليتان (u_n) و (v_n) لايمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف.

حذار: في هذا المثال $u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 3$ ولكنهما متتاليتان غير متجاورتان.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$u_{n+1} = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} : 2n + 2 = \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

(إذن: $u_n = u_n = u_n$ أي المتتالية $u_{n+1} = u_n > 0$) متزايدة تماما)

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(u_{n+1} - u_n\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \quad \text{and} \quad$ إذن: المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن: هما متقاربتان نحو نفس النهاية 1 $X_{n+1} = u_{n+1} + av_{n+1}$: فإن n عدد طبيعي n فإن (3 $x_{n+1} = u_{n+1} + av_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$ $= \frac{5u_n + 5v_n + 2au_n + 8av_n}{10}$ $= \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$ $2a+5\neq 0$ حيث $=\frac{2a+5}{10}\times\left(u_n+\frac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$ إذن: تكون (x_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن $n \in IN$ کل $x_{n+1} = \frac{2a+5}{10} x_n$ من أجل كل $u_n + \frac{8a+5}{2a+5}v_n = u_n + av_n$ $2a+5\neq 0$ مع $\frac{8a+5}{2a+5}=a$ (فان: يكفي ويلزم أن يكون: ويلزم أن يكون $2a^2 + 3a - 5 = 0$; $2a^2 + 5a = 8a + 5$; وهي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a. $\Delta = 9 + 40 = 49$ $a_2 = \frac{3-7}{4} = -1/1$ $a_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$ $2a+5=3\neq 0$ فإن من أجل a=-1 $x_{n+1} = \frac{3}{10}x_n$ إذن: يكفي أن نأخذ a = -1 في هذه الحالة: 3/10 أي (x_n) متتالية هندسية أساسها $x_{n=}-3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن: $x_0=u_0-v_0=-3$

 $2a+5=10\neq 0$ فإن a=5/2 من أجل

 $x_{n+1} = 1 \times x_n$ فإن a = 5/2 إذن: من أجل

 $u_{n+1} < v_{n+1}$: نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل n > 1 ونبر هن أن $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$ the limit is $=\frac{5u_n+5v_n-2u_n-8v_n}{10}$ $=\frac{3u_n-3v_n}{10}=\frac{3}{10}(u_n-v_n)$ $u_n - v_n < 0$ لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $|u_{n+1} < v_{n+1}|$ ومنه: $0 < \frac{3}{10} (u_n - v_n) < 0$ أي n+1 إذن: الخاصية صحيحة من أجل $u_n < v_n : n$ نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي 2) هل (u_n) و (v_n) متجاورتان؟ اتجاه التغير: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-1}{2} (u_n - v_n)$ $=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n-v_n) > 0$ ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي: المتتالية (u_n) متزايدة تماما. $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$ $=\frac{u_n+4v_n-5v_n}{5}=\frac{1}{5}(u_n-v_n)<0$ اذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ إذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ $u_n - v_n$ نهاية الفرق $\lim_{n\to+\infty} \left(u_{n+1} - v_{n+1} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n - v_n \right)$ (1) الكن: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10} (u_n - v_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 (u_{n-1} - v_{n-1})$: $= \dots = \left(\frac{3}{10}\right)^n ((u_0) - v_0)$ $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 :$

حل التمرين 15

لكل عد طبيعي n.

صحيحة من أجل n = 0.

 $:(U_{\pi})$ اتجاه تغیر المتتالیة

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2}{-U_n + 4} - U_n$$

$$= \frac{U_n^2 - 4U_n + U_n + 2}{-U_n + 4}$$

$$= \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{-U_n + 4}$$

ای المتالیة (x_n) هندسیة أساسها (x_n) المحالیة $y_{n+1} = u_n + b v_n$ نبخة: تکون المتالیة (y_n) المعرفة بن $b \neq -1$ هندسیة حیث $b \neq -1$ هندسیة حیث b = 5/2 اذا وفقط إذا کان b = 5/2 ثابتة وکل حدودها تساوي: وفي هذه الحالة المتالیة (y_n) ثابتة وکل حدودها تساوي: $y_0 = u_0 + \frac{5}{2}v_0 = -1 + 5 = 4$ $y_n = 4$ فإن $n \in IN$ في $v_n = \ell$ لتكن $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ $v_n = \ell$ لينا من أجل كل $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ $v_n = \ell$ اذن: $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ $v_n = \ell$ وهند $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ اذن: $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ وهو المطلوب $(4 + \frac{5}{2}v_n)$ $(5 + \frac{5}{2}v_n)$ $(6 + \frac{5}{2}v_n)$ (6 +

المرين 15

(بكالوريا 2008 علمي)

العبارة: I = [1,2] بالعبارة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$ بين أن الدالة f متزايدة تماما على f بين أنه من أجل كل عدد حقيقي f من المجال f(x) يتتمى إلى f(x)

 $(U_{\pi})^{(2)}$ هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي :

$$U_{n+1} = f(U_n)$$
 , $U_0 = \frac{3}{2}$

 I_{n} ينتمي U_{n} , u_{n} ينتمي U_{n} ينتمي u_{n} ينتمي u_{n} المتنتج أنها متقاربة . (u_{n}) استنتج أنها متقاربة . (u_{n})

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

الدرين 16:

 $u_{n+1} = \frac{5}{2}$: $u_n = \frac{5}{2}$ و من أجل $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$. $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$

(بكالوريا 2008 علمي)

ب/ تحقق أن (u_n) متزايدة.

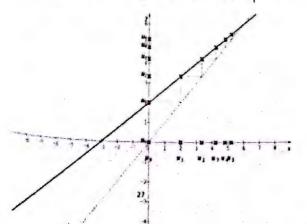
ج/ هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

 $v_n = u_n = 6$: n نضع من أجل كل عدد طبيعي (3) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

. $\lim_{n\to +\infty} u_n$ بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n

حل التمرين 16

 u_4, u_3, u_2, u_1, u_0 و Δ و عثيل الحدود (Δ) و (Δ) أ (رسم (Δ) و (1)



 $(U_n-1)(U_n-2) \le 0$: فإن $1 \le U_n \le 2$: بيا أن $U_n \le 0$ فإن $U_n + 4 \ge 0$

. ومنه $\left(U_{_{n}}
ight)$ متناقصة $U_{_{n+1}}-U_{_{n}}\leq0$

الاستنتاج : لدينا $\left(U_{n}
ight)$ متناقصة و محدودة من الأدنى فهي

متقاربة. $U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} : H(n)$ الخاصية (3)

 $U_0 = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: n = 0 من أجل

. أي P(0) صحيحة

 $U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$: نفرض أن P(n) صحيحة أي

 $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$: نبرهن صحة P(n+1) أي

 $U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 4} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{-1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4}$

 $= \frac{3 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 1}}{3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 1}} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

. نجد: $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$ نجد: $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$

 $U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$ حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن

 $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ لکل $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$ برا $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

(بكالوريا 2009 علمي)

(u,) متتالية معرفة على N كما يلي :

$$u_0 = 1$$
 , $u_1 = 2$, $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

 $v_n=u_{n+1}-u_n$: المتتالية (v_n) معرفة على N كما يلي

. v_1 أحسب v_0 و v_1

. برهن أن $(
u_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها(2)

: S_n أ/ أحسب بدلالة n المجموع (3

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$

$$v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$$
 (1

$$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$$

$$u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{7}{3}$$

$$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$$
:

عدد (
$$v_n$$
) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد

طبيعي n فإن: $v_n \times q = v_{n+1} \times q$ عدد حقيقي ثابت)

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي 11:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

.
$$q=rac{1}{3}$$
 ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها

 $_{_{0}}$ النخمين: في الرسم نلاحظ أن: الحدود $u_{_{4}} > u_{_{3}} > u_{_{2}} > u_{_{1}} > u_{_{0}}$ و من جهة أخرى الحدود $u_{_{1}} > u_{_{0}} > u_{_{1}} > u_{_{0}}$ م تراكم حول العدد 6 و عليه:

فإن: المتالية (un) متزايدة و متقاربة من العدد 6.

 $u_n \le 6$: الخاصية P(n) الخاصية الاكن

 $\frac{5}{2} \le 6$ من اجل $u_0 \le 6$ n = 0 صحيحة لأن

 $u_n \leq 6$ صحيحة أي P(n) و نبرهن صحة غرض أن

 $u_{n+1} \le 6 \text{ if } P(n+1)$

 $\frac{2}{3}u_n + 2 \le 6$: ومنه $\frac{2}{3}u_n \le 4$ ومنه $u_n \le 6$ الدينا

P(n+1) : اي $u_{n+1} \le 6$ صحيحة.

 $u_n \leq 6$: کال بالتراجع. فإن $u_n \leq 6$ لکل حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

ب) التحقق أن (س) متزايدة من أجل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$$

 $-\frac{1}{3}(u_n-6) \ge 0$ لدينا $u_n-6 \le 0$ لدينا

أي: $u_{n+1} - u_n \ge 0$ إذن: $u_{n+1} - u_n \ge 0$ أي:

 $f(u_n)$ متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ/ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$$

$$=\frac{2}{3}u_n-4=\frac{2}{3}(u_n-6)=\frac{2}{3}V_n$$

أي (V_*) متالية هندسية أساسها $q=rac{2}{3}$ و حدها الأول

$$V_0 = -\frac{1}{2}$$

$$U_n = V_n + 6 = -\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$
 کا $\lim_{n \to +\infty} U_n = 6$ ولاينا:

n بدلالة n نم استتج v_n بدلالة n

حل التمرين 18

$$u_3 = 20 - u_1 : (1)$$
 من $u_3 = 20 - u_1 : (1)$ نعوض $u_3 = 20 - u_1 : (20 - u_1)^2 + 20u_1 - 36 = 0$ نجد $u_1 = 20 - u_1 = 20$ مقبول أو $u_1 = 20$ مقبول أو $u_1 = 20$ متزايدة تماما متزايدة تماما $u_3 = 20 - 2 = 18$ فإن $u_1 = 2$ مناب الأساس $u_2 = u_1 q : q$ ناساس $u_2 = u_1 q : q$

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3 : equation$$

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1} / \cdot \cdot$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n / \cdot \cdot$$

$$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3^n - 1$$

$$3^{n} - 1 = 728$$
 ومنه $S_{n} = 728$:
$$n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$$
:
$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_{n} + u_{n}$$

$$v_{1} = 2$$
 (2)

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
 /1 (3)

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} / \varphi$$

$$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

$$= u_n - u_0$$

$$S_n = u_n - u_0 : \emptyset$$

$$u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$$
:

(بكالوريا 2009 علمي)

متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها (u_n)

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$
: حيث q

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

. n بدلالة u_n بدلالة u_n

: حيث S_n حيث :

$$n$$
 بدلالة $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

. $S_n = 728$: عين العدد الطبيعي n بحيث يكون

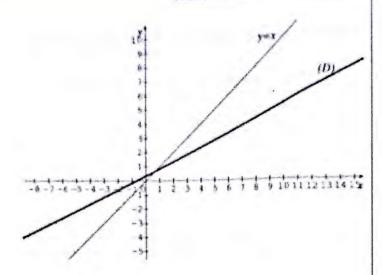
عير غير (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$$
 و $v_1 = 2$ عدوم کا یلي:

ا/ أحسب v2 و v3 .

-1 نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

 $\frac{1}{2}$ بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية (1 u_n و من أجل كل عدد طبيعي $u_0=6$.

$$.\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية:

. دون حسابها مبرزا خطوط الرسم u_4, u_3, u_2, u_1, u_0

(D) و (Δ) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل

 $u_{n} > \frac{2}{3}$, n عدد طبيعي

 (u_n) استنتج اتجاه تغیر المتتالیة

n نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي (3

 $v_n = u_n - \frac{2}{3}$: بالعلاقة

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها

الأول ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام ν_n ، و استنتج

n عبارة u_n بدلالة

 S_n حيث: ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

 $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

 $S'_{n} = u_{0} + u_{1} + \dots + u_{n}$ حيث S'_{n} حيث المجموع

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5 : v_3$$
 مساب v_2 و $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$,
$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} : v_2 + u_3 = \frac{3}{2}v_3 + u_3$$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3v_n + 2u_n}{6u_n} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 2u_n - 4u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{labeled as the model} \quad (w_n) : \omega_0$$

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad / \Rightarrow$$

$$w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{of } v_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} : \text{labeled } : n \text{ and } v_n = \frac{v_n}{u_n} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$$

التمرين 19:

(بكالوريا 2010 علمي)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس. مثلنا المستقيمين Δ و Δ معادلتيهما على الترتيب $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ و y = x

$$-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} < 0 \text{ as } j - \frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3} \text{ sol}$$

اي $u_n < u_n < u_n$ عا يعني أن $u_{n+1} - u_n < 0$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

$$v_0 = \frac{16}{3}$$
 إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
 : هي $v_n : 1$ هجارة الحد العام لـ : $v_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_n = v_n + \frac{2}{3}$$
 لدينا من أجل كل n طبيعي

$$u_n = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$
 e ais

$$S'_{n} = u_{0} + u_{1} + \dots + u_{n}$$

$$= \left(v_{0} + \frac{2}{3}\right) + \left(v_{1} + \frac{2}{3}\right) + \dots + \left(v_{n} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= S_{n} + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$S'_n = -\frac{32}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) + \frac{2}{3} (n+1) : j$$

النمريز 20:

(بكالوريا 2011 علمي)

المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = -1$ و من أجل كل u_n عدد طبيعي $u_n + 1$ ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$ ،

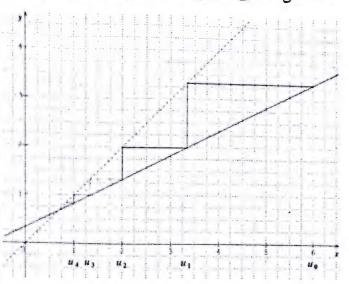
المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n به:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات إجابات إجابات إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل. (1) المتتالية (v_n):

حل التعرين 19:

1) أ) نقل المنحني و تمثيل الحدود على محور الفواصل:



ب) فاصلة نقطة التقاطع (Δ) و (D) هي حلول المعادلة

:
$$y = \frac{2}{3}$$
 و منه $x = \frac{2}{3}$ إذن $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$$(\Delta) \cap (D) = \left\{ H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

ج) التخمين هو أن المتتالية متناقصة تماما .

$$u_0 > \frac{2}{3}$$
 لأن $n = 0$ لأن (2) أ) الخاصية صحيحة من أجل

 $u_{n+1} > \frac{2}{3}$ و نثبت أنها صحيحة من أجل n+1 أي $\frac{2}{3}$

لدينا $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{3}$ تعني أيضا

n اي $u_{n+1} > \frac{2}{3}$ اي $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} > \frac{2}{3}$

 $.u_n > \frac{2}{3} : d_n > \frac{2}{3}$

 \cdot ب) لدينا من أجل كل n طبيعي :

$$u_n > \frac{2}{3}$$
 و لكن $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

أ. حسابية. ب. هندسية. ج. لا حسابية و لا هندسية.

المتتاليات العددية

(بكالوريا 2011 علمي)

lphaعدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن lpha

متتالية عددية معرفة على N بـ: $6=u_0$ و من أجل (u_n)

 $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ ، اعدد طبيعي

بـ: n متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$$

. lpha متتالية هندسية أساسها (v_n) أ) بين أن (1

n بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة v_n u_n عبارة α

ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية متقاربة. (u_n)

 S_n نضع $\alpha = \frac{3}{2}$ نضع (2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$ نضع (2) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n :$ $= T_n$ $.T_n = u_0 + u_1 + + u_n \ g$

أ) أ) إثبات أن المتتالية (V_n) هندسية (V_n) متتالية هندسية $V_{n+1} = q \times V_n$: يعني أنه يوجد عدد حقيقي q حيث الدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha U_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$= \alpha U_n + \frac{\alpha - 1 + 1}{\alpha - 1}$$

 $V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{1}{x-1} = x \left(U_n + \frac{1}{\alpha - 1} \right) = \alpha \times V_n$ q=lpha و عليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\infty$. ج $\left|-\frac{1}{2}\right|$ به المتتالية $\left(u_{n}\right)$ هي : أ. ∞ + $\left(v_{n}\right)$ ج $\left(u_{n}\right)$ انضع من أجل كل عدد طبيعي ١١ ،

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3} \right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3} \right]$$

$$S_n = \frac{3^{n-1}-1}{2} \cdot 1$$

$$S_n = \frac{1 - 3^n}{4} \dots$$

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$
.

حل النمريين 20

: بالتتالية (V_n) هي (V_n) عندسية الأن (1

$$V_{n+1} = V_{n+1} + \frac{1}{2} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$
$$= 3U_n + \frac{3}{2} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right) = 3V_n$$

: لأن
$$(+\infty)$$
 هي (U_n) الأن $(2$

$$V_0\!=\!-rac{1}{2}$$
 متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول V_n متالية $V_n=V_0q^n=-rac{1}{2}\! imes\!3^n$ أي $V_n=V_0q^n=-rac{1}{2}\! imes\!3^n$

$$U_n = V_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$
 وعليه

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) = -\infty$$
 وبالتالي:

: هي S_n ، n هي المجل کل عدد طبيعي

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4} - \epsilon$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3} \right] : 3^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{2} \left(3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$$

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}$$
: لدينا

$$V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{6x - 5}{x - 1}\right) \alpha^n : \text{also } p$$

 $: \alpha$ استنتاج U_n بدلالة u

$$U_n = V_n - \frac{1}{\alpha - 1}$$
: فإن $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha - 1}$: بها أن

$$U_n = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1} : \text{also}$$

ج) تعیین قیم
$$lpha$$
 حتی تکون من أجلها (U_n) متقاربة :

$$\lim_{n o +\infty} lpha^n = 0$$
 : حتى تكون (U_n) متقاربة يجب أن تكون

.
$$x \in \left]0,1\right[$$
 و عليه قيم α المكنة هي

:
$$T_n$$
 و S_n بوضع $\alpha = \frac{3}{2}$ حساب المجموعين (2

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$V_0 = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$
: لدينا

$$S_n = 8 \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right] = 16 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1 \right] : \text{also } s$$

$$T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

= $(V_0 - 2) + (V_1 - 2) + \dots + (V_n - 2)$

ومن جهة:

$$= S_n - 2(n+1) = 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 16 - 2n - 2$$
$$= 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

الدوال الأصلية والحساب التكاملي





1) تعريف دالة أصلية لدالة:

ردالة عددية معرفة على مجال I .نسمى دالة أصلية للدالة f دالة عددية معرفة على F قابلة للاشتقاق على I بحيث من أجل كل f فإن F'(x) = f(x) .

مثال: • f معرفة على R بـ:

$$f(x) = 2x F(x) = x^2 + 1$$

 $x \in R$ قابلة للاشتقاق على R حيث من أجل كل

:ومنه
$$F'(x) = x^2 + 1 = 2x = f(x)$$

. R دالة أصلية للدالة f على F

2) مجموعة الدوال الأصلية:

I دالة أصلية للدالة f على مجال F

وتسمى كل الدوال من الشكل : F(x)+c بمجموع الدوال الأصلية للدالة f على مجال C). I عدد حقيقي ثابت

f(x)=2x بثال: • f معرفة على R بـ: f

. R على F_1 دالة أصلية للدالة f على F_1 على F_1

فإن مجموع الدوال الأصلية للدالة f على R هي جميع

 $F(x) = x^2 + 1 + c$ | Illustration of the second second

(c) عدد حقیقی ثابت)

للاللة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير: إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال f هي مجموع الدوال الأصلية للدالة f على المجال f

 x_0 فإن الدالة F_1 التي تأخذ قيمة y_0 من أجل القيمة $y_0 = F(x_0) + c$ أي $G(x_0) = y_0$: عُقَقَ

 $F_1(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$: $c = y_0 - F(x_0)$ أي $c = y_0 - F(x_0)$ ومنه $c = y_0 - F(x_0)$ الدوال الأصلية لدوال مألوفة:

الدالة f	دوالها الأصلية F	المجال ا
(a) عدد حقيقي ثابت)	a.x + c	R
$(n \in N^*) x^n$	$\frac{1}{n+1}.x^{n+1}+c$	R
$(n \in N^* - \{1\}) \frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1).x^{n-1}} + c$]0;∞ -[أو
]0;+∞[
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	R
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	R
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + c$]0;+∞[
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$]0;+∞[
e^x	$e^x + c$	R

5) العمليات على الدوال الأصلية:

• المجموع : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال f و G دالة أصلية للدالة f على المجال f فإن : الدالة f على المجال f .

•جداء عدد حقيقي بدالة:

I إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال

k و G دالة أصلية للدالة f على المجال G و G دالة أصلية للدالة G (عدد حقيقي ثابت)

k.f فإن : الدالة k.f دالة أصلية للدالة k.f على المجال $n \ge 1$. حيث $n \ge 1$. حيث $n \ge 1$

ونرمز له بـ: $\int\limits_a^b f(x)dx$ ونقرأ تكامل من $\int\limits_a^b f(x)dx$ للدالة

x تفاضل f

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F(x)]_{a}^{b} = F(b) - F(a) :$$

$$\int_{1}^{2} x^{2} dx = \left[\frac{1}{3}.x^{3}\right]_{1}^{2} = \left(\frac{1}{3}.2^{3}\right) - \left(\frac{1}{3}.1^{3}\right) = \frac{7}{3} :$$
مثال :

خواص:

. حيث
$$k$$
 عدد حقيقي ثابت $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ (3

$$I$$
 علاقة شال : من أجل كل a و b من المجال (4

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx :$$
فإن

[a;b] المقارنة : f و g دالتان مستمرتان على المجال (5

: فإن
$$x \in [a;b]$$
 من أجل كل $f(x) \ge 0$ فإن

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \ge 0$$

: فإن $x \in [a;b]$ من أجل كل $f(x) \ge g(x)$ فإن g(x)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \ge \int_{a}^{b} g(x)dx$$

2) حساب المساحات:

S (1) و محور من المستوى محصور بين (Cf) و محور

x = b و x = a الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها

 $x \in [a;b]$ لما يقع فوق محور الفواصل لما (Cf) غي حالة

$$S = \int_{a}^{b} f(x) dx \quad (u.s)$$

 $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$: الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة الأصلية للدالة u' الدالة الأصلية للدالة u' هي الدالة : u' هي الدالة الأصلية للدالة u' هي الدالة الأصلية للدالة u' : u' الدالة الأصلية للدالة u'

 $\sqrt{u}: \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ هي الدالة :

:
$$\left(\frac{u'}{u}\right)$$
 الدالة الأصلية للدالة الأصلية الدالة الذالة الدالة الدالة الدالة الذالة الدالة الدا

 $\ln |u|$: الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة

: $u'.e^{u}$ الدالة الأصلية للدالة ا

 e^u : الدالة الأصلية للدالة $u^\prime.e^u$ الدالة الأصلية للدالة

 $a \neq 0$ حيث: $\sin(ax+b)$ عيث: $\sin(ax+b)$

الدالة الأصلية للدالة $\sin(ax+b)$ هي الدالة :

$$\frac{-1}{a}$$
.cos($ax + b$)

 $a \neq 0$ حيث: $\cos(ax+b)$ عيث • الدالة الأصلية للدالة

: الدالة الأصلية للدالة $\cos(ax+b)$ هي الدالة

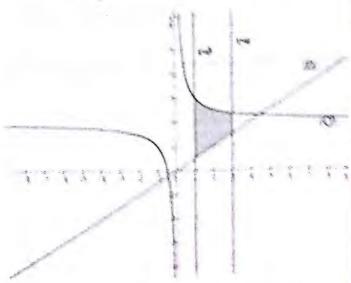
$$\frac{1}{a}$$
.sin($ax+b$)

الحساب التكاملي وحساب المساحات

1) تعريف:

I دالة مستمرة على المجال I و F دالتها الأصلية على المجال f و d عددان حقيقيان من المجال d . يسمى العدد الحقيقي d عددان d بالتكامل من d إلى dللدالة d

 $S = \frac{1}{2} \left[x(x) - (x, x + 3) \right] dx \quad (us)$



: x e [a:b] u (A) = = = = (C) 21- jo

$$S = \iint (\alpha x + \beta) - f(x) | dx$$
 (us)

3) الذيمة المتوسطة لدالة على عجال (6:1):

إذا كانت دالة / مستمرة على المجال (a:b) فإنه يوجد عدد حقيقي (C ∈ [a:b) .

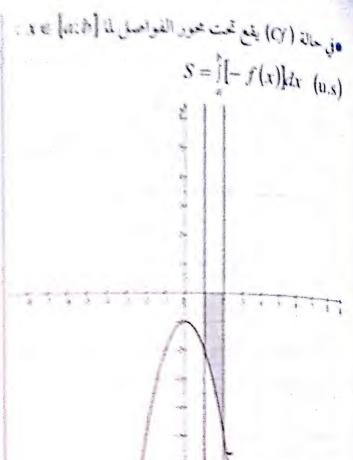
$$f(C) = \frac{1}{b-u} \int_{a}^{b} f(x) dx : 2$$

وتسمى الفيمة f(C) بالفيمة المتوسطة للدالة f على المجال f(c).

ث) الدالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال / والتي تنعدم
 من أجل قيمة من / :

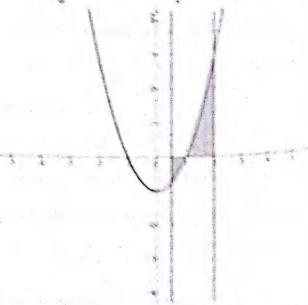
م و الله مستمرة على المجال 1.

المالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال 1 والتي تنعدم من $F(x) = \int_{a}^{b} f(t) dt$ حيث: $f(x) = \int_{a}^{b} f(t) dt$



أي حالة (٧) يقع تحت محور الفواصل لما (٣٠٠) عدد
 و (٧) يقع فوق محور الفواصل لما (٣٠٥) عدد

$$S = \int [-f(x)] dx + \int [f(x)] dx (us)$$



2/3 مساحة حيز من المستوى محصور بين (C) و المستقيم المثل (1) المامي معادلته كل + 2.0 = 1 ، والمستقيهات التي

Tay Tau Alpho

تمارين

التمرين 01:

بين أن الدالة f أصلية للدالة f على المجال D ثم عين دالة أصلية أخرى للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^2 - 10x - 9 (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x - 1$$

$$D=R$$
,

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$
 (2)

$$D =]1; +\infty[F(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1)]$$

حل التمرين 01:

1) الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال IR ودالتها المشتقة هي: $F'(x) = x^2 - 10x - 9 = f(x)$ ومنه F هي دالة أصلية ل f على F

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

عدد حقيقي ثابت $x\mapsto F(x)+c$ عدد حقيقي ثابت وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x - 1$$

فنحصل على دالة أصلية أخرى :

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 9x + 1$$

$$F(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1)$$
(2)

$$F(x) = x^{2} - x + \ln(x^{2} - 1) (2$$

 $x^2-1>0$ معرفة إذا كان F:F معرفة إذا كان $D_F=]-\infty;-1$ [U] $1;+\infty$ وعليه فإن

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]\infty+;1$ [و دالتها المشتقة هي: $F(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$ ومنه $F(x)=1;+\infty$ أصلية لا f على $[1;+\infty]$.

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي: c عدد c عيث c عدد c خيث c خيث c عدد حقيقي ثابت وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة c يكفي تغيير العدد الحقيقي على دالة أصلية أخرى للدالة c يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة c عبارة c أضلية أخرى :

 $G(x) = x^2 - x + \ln(x^2 - 1) + 5$

لنمرين 02.

: کا یلي $R - \{-1;3\}$ کا یلي الله عددیة معرفة علی f

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

عين العددين الحقيقيين lpha و eta بحيث من أجل كل x من

 $: R - \{-1;3\}$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

 \cdot]3;+ ∞ [على المجال f على المجال أ0

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$
 :-]0;+\infty[...]0;+\infty[

a عين الأعداد الحقيقية a و a حيث من أجل كل a من $f(x) = a + \frac{b e^x}{e^x - 1}$: $]0;+\infty[$

على المجال]∞+;0[

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

ما التعريين 02

 $x \in D_f$ من أجل (1)

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

$$= \frac{2x-2+\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2)x+(\beta-3\alpha-2)}{x^2-2x-3}$$

$$(\alpha+\beta+2=2; \beta-3\alpha-2=-7) : \text{ in the problem of } \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 2 \\ \beta - 3\alpha - 2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - 3\alpha = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4\beta = -5 \end{cases} : \text{eais} \begin{cases} \alpha = \frac{5}{4} \\ \beta = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

 $:]3;+\infty[$ على المجال المجال $x \in D_f$ من أجل المجال : $x \in D_f$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{5}{4(x-3)}$$

 $\ln |u|$: هي الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة

ر 1 > 0 و x + 1 > 0 و x + 1 > 0 و x + 1 > 0 و x + 1 > 0

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ على

$$x \mapsto \ln(x^2 - 2x - 3)$$
 هي $[3; +\infty]$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $\frac{5}{4(x+1)}$ على المجال

$$x \mapsto \frac{5}{4} \ln(x+1) \approx [3;+\infty[$$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $\frac{5}{4(x-3)}$ على المجال

$$x \mapsto \frac{5}{4} \ln(x-3) \text{ as }]3;+\infty[$$

ومنه: من أجل كل $x \in [3;+\infty[$ فالدالة:

$$x \to \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4}\ln(x + 1) + \frac{5}{4}\ln(x - 3)$$

دالة أصلية للدالة f في المجال] $3;+\infty$ ولدينا:

دالة أصلية
$$F(x) = \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x+1}{x-3}$$

.]3;+∞ على المجال f على المجال

$$:]0;+\infty[$$
 من أجل كل x من أجل كل (2

$$a + \frac{be^{x}}{e^{x} - 1} = \frac{ae^{x} - a + b^{e}}{e^{x} - 1} = \frac{(a + b)e^{x} - a}{e^{x} - 1}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a=-2 \end{cases} نحصل على $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ بالمطابقة مع:$$

$$f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$$
 :أي
$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

لدىنا:

 $]0;+\infty[$ الدالة $x\mapsto 2$ أصلية للدالة $x\mapsto 2$ أصلية للدالة $x\mapsto e^x$ على $x\mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$ أصلية للدالة $x\mapsto \ln(e^x-1)$ على المجال $[0;+\infty[$

f منه: $F(x) = 2x - \ln(e^x - 1)$ منه: $f(x) = 2x - \ln(e^x - 1)$

النمرين 03:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u \times u^n$

147

الدوال الأصليت والحساب التكاملي

$$I = IR : f(x) = (x-1)^4$$
 (1

$$I = IR : f(x) = 3(3x+4)^5$$
 (2)

$$I = IR : f(x) = e^{x}(e^{x} - 1)^{2}$$
 (3)

$$I = IR : f(x) = x^{2}(x^{3} + 1)^{4} (4$$

$$I =]0; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x} [\ln(x)]^2]$$
 (5)

$$I = IR : f(x) = 2\cos x \sin^2 x$$
 (6)

حل التمرين 03 ؛

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن: الدالة الأصلية للدالة u'.u'' هي الدالة :

$$\binom{n \neq -1}{n+1} \cdot u^{n+1}$$

$$u'(x) = 1$$
: نضع $u(x) = x - 1$ نضع (1

$$f(x) = (x-1)^4 = u'(x) \times [u(x)]^4$$
 إذن:

ومنه: الدالة
$$\frac{1}{4+1} [u(x)]^4$$
 هي دالة أصلية

ل
$$F(x) = \frac{1}{5}(x-1)^5 + c$$
 اي: $x \mapsto (x-1)^4$ هي مجموعة

الدوال الأصلية للدالة f .

$$u'(x)=3$$
 نضع: $u(x)=3x+4$ نضع: (2

$$f(x) = 3(3x+4)^5 = u'(x)[u(x)]^5$$
:

إذن: الدالة
$$\frac{1}{6} [u(x)]^6$$
 هي دالة أصلية

ل
$$F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^6c$$
 اي: $x \mapsto u'(x) \left[u(x)\right]^5$ هي جموعة الدوال أصلية للدالة f

$$u'(x) = e^x$$
 :نضع (3) نضع (3) نضع

$$f(x) = e^{x} (e^{x} - 1)^{2} = u'(x) [u(x)]^{2}$$
:

إذن:الدالة
$$[u(x)]^3$$
 هي دالة أصلية

$$F(x) = \frac{1}{3} (e^x - 1)^3 + c$$
 : $U(x) [u(x)]^2$ هي

f بجموعة الدوال أصلية للدالة

(4) نضع:
$$u(x) = 3x^2$$
: هنه $u(x) = x^3 + 1$ نضع: $f(x) = x^2(x^3 + 1)^4 = \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$
 $f(x) = x^2(x^3 + 1)^4 = \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$
 $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}[u(x)]^2$ هي دالة أصلية ل

 $f(x) = \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$ ني $f(x) = \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$ الأصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$ هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$
 : نضع $u(x) = \ln x$ إذن: $u(x) = \ln x$ إذن: $u(x) = \ln x$ هي دالة أصلية ل $u(x) = \ln x$ إذن: $u(x) = \ln x$ هي دالة أصلية ل $u(x) = \ln x$

.
$$f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$
 أي: $f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$

$$u'(x) = \cos x$$
 :نضع $u(x) = \sin x$ إذن (6

$$f(x) = 2\cos x \sin^2 x = 2u'(x) [u(x)]^2$$
 إذن:

منه: الدالة
$$[u(x)]^3$$
 منه: الدالة

ل
$$F(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$
 أي: $x \mapsto 2u'(x) \left[u(x)\right]^2$ هي جموعة الدوال أصلية للدالة f .

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$
 الدالة المعرفة على]0;1[ب

$$[0,1]$$
عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل x من a

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{\left(x-1\right)^2}$$

2) إستنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال]0;1[تحقق

$$F(\frac{1}{2}) = 6$$

حل التمرين 04:

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$
 ان أجل كل x من أجل كل x من]0;1 لدينا:

$$=\frac{a(x^2-2x+1)+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

الدوال الأصليت والحساب التكاملي

حل النمرين 05

لتعرين 05:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)^3} \cdot]1; +\infty[x^3 + 3x] + \infty[x^$$

 $]1;+\infty[$ على f على الأصلية للدالة f على ا $^{(2)}$

F(0)=1 :ققق f للدالة f تحقق الدالة أصلية

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

 $|x| + (x-2) \ln |x-2| - (x+2) \ln |x+2| + c$ is its in its in |x+2| + cأصلية للدالة / حيث (، عدد حقيقي ثابت).

u(x) باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $\frac{u(x)}{[u(x)]^n}$

عين الدوال الأصلية للدالة / في كل حالة من الحالات

$$I =]2; +\infty[:f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} (1$$

$$I =]-1; +\infty[: f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$$
 (2)

$$I =]1/2; +\infty[: f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3} (3$$

$$I =]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}]$$
 (4)

$$I = IR : f(x) = \frac{ex}{(1+ex)^2}$$
 (5)

$$I = IR : f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$$
 (6)

$$I =]-1; +\infty[: f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$$
(7)

$$I =]-\pi/2; \pi/2[: f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$
 (8)

$$I =]0; +\infty[: f(x) = \frac{-e^{x} - 2}{(e^{x} + 2x)^{2}}$$
(9)

$$I = [1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2}] (10)$$

حل التعريين 07:

u'(x) = 1 نضع: u(x) = x - 2 نضع: (1

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} = 5(\frac{u'(x)}{[u(x)]^7})$$
 : إذن

منه: الدالة أصلية ل $x \mapsto 5(\frac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}}$ دالة أصلية ل $x \mapsto 5\frac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

f أي: $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية لـ

F(0) = 1 :غقق f للدالة f غقق (3

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = 1/2$$

ومنه: $F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{2}$ هي الدالة

الأصلية المطلوبة.

 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$ دالة معرفة على $f(x) = \frac{1}{x+2}$ بـ $f(x) = \frac{1}{x+2}$

 $]-a;+\infty[$ عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على]

$$g(x) = (x+a) \ln |x+a| - x = x$$

حيث (a عدد حقيقي ثابت).

 $: x \mapsto \ln |x+a|$ استنتج دَالة أصلية للدالة (2

 $]-a;+\infty[$ $\downarrow = h$

.]2;+ ∞ [على] ∞ + 3 استنتج مجموع الدوال الأصلية للدالة f على]

حل التمرين 06 ;

$$g'(x) = \ln|x+a| + (x+a) \times \frac{1}{x+a} - 1$$
 (1)
= \ln |x+1| + 1 - 1 = \ln |x+a|

g'(x) = h(x) أي $g'(x) = \ln |x + a|$ (2) لدينا:

 $]-a;+\infty[$ هى دالة أصلية له h على g

 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \ln |x-2| - \ln |x+2|$ (3)

حسب السؤال (1) فإن:

 $x\mapsto \ln|x-2|$ الدالة $x\mapsto (x-2)\ln|x-2|-x$ أصلية ل $x \mapsto \ln|x+2|$ الدالة $x \mapsto (x+2) \ln|x+2| - x$ أصلية ل

 $x \mapsto (x-2) \ln |x-2| - x - [(x+2) \ln |x+2| - x]$

 $x \mapsto \ln|x-2| - \ln|x+2|$ أصلية للدالة:

150

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

$$u'(x) = 3x^{2} : \text{ with } x = x^{3} + 1 : \text{ with } f(x) = \frac{6x^{2}}{(x^{3} + 1)^{4}} = 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{4}}) : \text{ with } f(x) = \frac{6x^{2}}{(x^{3} + 1)^{4}} = 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto -\sin x : \text{ with } x \mapsto -\cos x = 0 : \text{ with } x \mapsto -\cos x = 0 : \text{ with } x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{3}}) : \text{ with } x \mapsto -(\frac{-1}{2(u(x))^{2}}) : \text{ with } x \mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^{2}}) : \text{ with } x \mapsto -(\frac{1}{x}) : \text{ w$$

التمرين 08:

 $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال f

 $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ الدالة $x \mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية ل

إذن: $F(x) = \frac{-1}{r^2 - x + 1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = -1$$
: نضع: $u(x) = 2 - x$: نضع: (4)

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + 3 = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} + 3$$
:

إذن:
$$F(x) = -2 - \sqrt{2-x} + 3x + c$$
 هي الدالة الأصلية
للدالة f

$$u'(x) = e^x$$
: نضع: $u(x) = e^x - 1$: نضع (5

$$f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
:

$$F(x) = 2\left(2\sqrt{e^x - 1}\right) + c$$
 إذن:

$$f$$
 أي: $F(x) = 4\sqrt{e^x - 1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = 1$$
: منه: $u(x) = x - 3$ نضع: (6

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
 : إذن:

$$F(x) = 2(2\sqrt{x}) - 2(2\sqrt{u(x)}) + c$$
 : axis

أي:
$$F(x) = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3} + c$$
 هي الدالة الأصلية

 $u'(x) = \cos x$ نضع: $u(x) = \sin x$ نضع (7

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
 إذن:

f منه: $F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c$ منه:

$$u'(x) = -2\sin x$$
 نضع: $u(x) = 2\cos x + 3$ نضع: (8

$$\sin x = \frac{-1}{2}u'(x) :$$

للدالة f.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \right)$$
 : إذن:

$$F(x) = -\frac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x + 3} + c)$$

أي:
$$F(x) = -\sqrt{2\cos x + 3} + c$$
 هي الدالة الأصلية للدالة f

$$I =]1; +\infty[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}]$$
 (1)

$$I =]2; +\infty[: f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}]$$
 (2)

$$I =]3; +\infty[: f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x - 6}}]$$
 (3)

$$I =]-\infty; 2[: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$$
 (4)

$$I =]0; +\infty[: f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} (5$$

$$I =]3; +\infty[: f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}}]$$
 (6)

$$I =]0; \pi[: f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}]$$

$$I = IR: f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$$
 (8)

$$I =]0; +\infty[: f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 - x^2}}]$$

حل التمرين 08:

$$u'(x) = 1$$
: نضع: $u(x) = x - 1$ نضع: (1

$$F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$$
:منه: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ منه:

f هي الدالة الأصلية للدالة

$$u'(x) = 2x$$
 نضع $u(x) = x^2 - 4$ نضع (2

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
 :423

.
$$f$$
 هي الدالة الأصلية للدالة $F(x) = 2\sqrt{x^2 - 4} + c$ إذن:

$$u'(x) = 2x - 1$$
 : نضع (3 نضع نصع (3) نضع (3

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
:

إذن:
$$F(x) = 2\sqrt{x^2 - x - 6} + c$$
 هي الدالة الأصلية للدالة . f

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

 $u'(x) = 3x^{2} + 2x : 0 \text{ if } u(x) = x^{3} + x^{2} \text{ if } 0$ $f(x) = \frac{3x^{2} + 2x}{\sqrt{x^{3} + x^{2}}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \text{ if } 0$

09

 $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$ بد الله معرفة على f الله معرفة على f "(x) برا الله معرفة على f "(x) برا الله من f "(x) برا الله من f الله من أجل كل f من f الله أصلية للدالة f على f المتنج دالة أصلية للدالة f على f المتنج دالة أصلية للدالة f على f

حل التمرين 09

 $f'(x) = (4x-7)e^{x} + (ex^{2}-7x+5)e^{x}$ $= (2x^{2}-7x+5+4x-7)e^{x}$ $= (2x^{2}-3x-2)e^{x}$ $f''(x) = (4x-3)e^{x} + (2ex^{2}-3x-2)e^{x}$ $= (2x^{2}+x-5)e^{x}$ $: (2x^{2}+x-5)e^{x}$ $: (2x^{2}+x-5)e^{x}$

 $4e^{x}+2f'(x)-f''(x) = (4+4x^{2}-6x-4-2x^{2}-x+5)e^{x}$ $= (2x^{2}-7x+5)e^{x} = f(x)$

 $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$ = 4 $e^x + 2f'(x) - f''(x)$ الدالة $x \mapsto 4e^x$ أصلية لـ $x \mapsto 4e^x$

 $x \mapsto f'(x)$ أصلية لـ $x \mapsto f(x)$

 $x \mapsto f''(x)$ أصلية ل $x \mapsto f'(x)$

f أصلية ل $x\mapsto 4e^x+2f(x)-f'(x)+c$ أصلية لأ أي الدالة :

 $x \mapsto 4e^x + 2(2x^2 - 7x + 5)e^x - (2x^2 - 3x - 2)e^x + c$ أصلية للدالة f أي الدالة :

 $x \mapsto (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^{x+c}$

 $x\mapsto \left(2x^2-11x+16\right)e^x+c$ أصلية للدالة f أي الدالة أصلية للدالة أصلية للدالة أصلية للدالة أصلية للدالة أصلية للدالة أ

التمرين 10

 $f(x) = \cos^3 x$ به IR دالة معرفة على f دالة معرفة على $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$ ثم إستنتج دالة أصلية للدالة $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$.

حل التمرين 10

: IR من أجل كل x من

 $\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x)$ $= \cos x (\cos^2 x)$ $= \cos^3 x = f(x)$

 $x \mapsto \cos x$ أصلية ل $x \mapsto \sin x$ الدالة $x \mapsto \cos x \sin^2 x$ أصلية ل $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$ الدالة

f إذن: الدالة $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة

التمرين 11:

 $f(x)=x\cos x$ به IR دالة معرفة على IR به $f(x)=x\cos x$ أثبت أن: $f(x)+f''(x)=-2\sin x$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f(x)=x\cos x$

حل التمرين 11:

 $f'(x) = \cos x - x \sin x$ $f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$ و $f''(x) = -2\sin x - \sin x - x \cos x$ و $f''(x) = -2\sin x - f(x)$: و $f''(x) + f(x) = -2\sin x$: $f''(x) + f(x) = -2\sin x$: $f(x) + f(x) = -2\sin x$: $f(x) = f''(x) - 2\sin x$: $f(x) = f''(x) - 2\sin x$: $f(x) = -f''(x) - 2\cos x + c$: $f(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$: $f''(x) = -\cos x + x \sin x + 2\cos + c$:

f أي: $F(x) = \cos x + x \sin x + c$ أي:

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln^{2} x\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\ln^{2} e - \ln^{2} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln^{2} x}{x} dx = \int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln^{2} x\right) dx \qquad (4)$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln^{3} x\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(\ln^{3} e - \ln^{3} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln^{3} x\right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln^{4} x\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\ln^{4} e - \ln^{4} 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^{1} (x+1-\frac{1}{x+2}) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+2|\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 - \ln(1+2)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot (-1)^2 - 1 - \ln(-1+2)\right)$$

$$= 2 - \ln 3$$

السرين 12

$$\int_{1}^{3} (x^{3} + 2x^{2} + 1) dx (1 : \frac{\pi}{2}) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x . \sin^{2} x) dx (2$$

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx (3$$

$$\int_{1}^{e} \frac{(\ln x)^{2}}{x} dx (4$$

$$\int_{1}^{e} \frac{(\ln x)^{3}}{x} dx (5$$

$$\int_{1}^{1} (x + 1 - \frac{1}{x + 2}) dx (6$$

$$\int_{1}^{2} \frac{x^{4} + x^{3} + x^{2} + x}{x^{2}} dx (7$$

حل التمرين 12:

$$\int_{1}^{3} (x^{3} + 2x^{2} + 1) dx = \left[\frac{1}{4} x^{4} + \frac{2}{3} x^{3} + x \right]_{1}^{3}$$
(1)
$$= \left(\frac{1}{4} (3)^{4} + \frac{2}{3} (3)^{3} + 3 \right) - \left(\frac{1}{4} (1)^{4} + \frac{2}{3} (1)^{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{165}{4} - \frac{23}{12} = \frac{472}{12} = \frac{118}{3}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin^{2} x) dx = \left[\frac{1}{3} \sin^{3} x \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$
(2)
$$= \left(\frac{1}{3} \sin^{3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(\frac{1}{3} \sin^{3} (0) \right)$$

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

$$u'(x) = 1 v(x) = \sin x v'(x) = \sin x v'(x) = \cos x \int_{0}^{\pi} x \cos x dx = \int_{0}^{\pi} u(x).v'(x) dx = [u(x).v(x)]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} u'(x)v(x) dx = [x \sin x]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \sin x dx = \pi \sin \pi - 0[-\cos x]_{0}^{\pi} = -(-\cos \pi + \cos 0) = -2
$$u'(x) = 1 v(x) = e^{x} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \end{cases} v'(x) = e^{x} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ v'(x) = e^{x} \\ \end{bmatrix} \end{cases} = e^{-(-e^{2} - e^{2})} = e^{-(e^{2} - e^{2})} = 2e^{-e^{2}} F(x) = [t(\ln t)^{2}]_{1}^{x} - \int_{1}^{x} \frac{2t}{t} \ln t dt = x(\ln x)^{2} - 2[t \ln t - t]_{1}^{x} = x(\ln x)^{2} - 2[x \ln x - x + 1] = x(\ln x)^{2} - 2[x \ln x - x + 1] = x(\ln x)^{2} - 2x \ln x + 2x - 2$$$$

ملاحظة: الدالة $t \mapsto t \ln t - t$ هي دالة أصلية للدالة $t \mapsto t \ln t$ على المجال $t \mapsto t \ln t$

العربي 14

$$\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} : x$$
 ين أن من أجل كل عدد حقيقي (1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي (2) بين أن من أجل كل عدد حقيقي (2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب (2)

$$\int_{1}^{2} \frac{x^{4} + x^{3} + x^{2} + x}{x^{2}} dx$$

$$= \int_{1}^{2} \left(x^{2} + x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^{3} + \frac{1}{2} x^{2} + x + \ln|x| \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{29}{6} - \ln 2$$

13

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية: $\int_{1}^{e} x \ln x dx$ (1 $\int_{0}^{\pi} x \cos x dx$ (2 $\int_{1}^{2} (x-2)e^{x} dx$ (3 $F(x) = \int_{1}^{x} (\ln t)^{2} dt$ (4

حل التمرين 13 :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{2}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2}x^{2}$$

$$v'(x) = x$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^{2} \ln x\right]_{1}^{e} - \int_{1}^{e} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^{2} \ln x\right]_{1}^{e} - \frac{1}{2}\int_{1}^{e} x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2} - 0\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^{2}\right]_{1}^{e}$$

$$= \frac{e^{2}}{2} - \left(\frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^{2} + 1}{4}$$

حل التعريين 15

 $_{\Delta=9-8=1}$ [0:1] لندرس إشارة الدالة f على المجال (1

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$
:03

: ais

إذن: على المجال [0:1] المنحنى (C) فوق محور الفواصل إذن: (f(x)≥0) إذن:

$$S = \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{0}^{1} (x^{2} - 3x + 2) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3} x^{3} - \frac{3}{2} x^{2} + 2x \right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$$

 $(x-1)e^{x} \le 0$: غلى المجال [0;1] لدينا $0 \ge 1 - 1 \le 0$ اذن: $0 \le 1 \le 1$ لأن $0 \le 1 \le 1 \le 1$

$$S = \int_{0}^{1} -f(x) dx = \int_{1}^{0} (x-1)e^{x} dx$$

نضع: $\alpha = \int_1^0 (x-1)e^x dx$ نضع: نضع

$$\alpha = [(x-1)e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x dx$$
 :

$$\alpha = -e^0 - 0 - \left[e^{\lambda}\right]_0^0 : \emptyset$$

$$\alpha = -1 - (1 - e)$$
 : أي

حل التمرين 14:

1) من أجل كل x من IR)

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^x}{e^x} \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \right) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$u(x) = x$$

$$v'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$
 نضع (2) التكامل بالتجزئة: نضع

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$$
 : نذن

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x + 1\right)^2} dx = \left[\frac{-x}{e^x + 1}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - 0 - \int_0^1 \frac{-1}{e^x + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e + 1} - \left[\ln(e^{-x} + 1)\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{e+1} - \left[\ln \left(\frac{1}{e} + 1 \right) - \ln(1+1) \right] = \frac{-1}{e+1} - \ln \left(\frac{1+e}{2e} \right)$$

التمرين 15:

عيث [0;1] منحى الدالة f على المجال (C)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال [0:1].

يث (2) ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال [0;1] حيث (2) ليكن (C) منحنى الدالة f

$$f(x) = (x-1)e^x$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل على المجال [0:1]

16

: حيث $D = R - \{-1\}$ حيث f $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$ (o; i; j) $(f(x) = x - 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$

- (C_f) مستقيم معادلته y=x-1 حدد وضعية بالنسبة لـ (Δ) .
- lpha>1 عدد حقیقی ثابت حیث lpha>1 أحسب مساحة lpha>1 الحيز من المستوى المحدد بـ (C_f) و (Δ) و المستقيمين $lpha=\alpha$ و $lpha=\alpha$ ثم حساب نهاية A(lpha) عند $lpha=\alpha$

حل التعريين 16:

$$x-1+\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)^2+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+2x+1)+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+x-x^2-2x-x+4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3+x^2-2x+4}{(x+1)^2} = f(x)$$

(2) تحدید وضعیة (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : (ندرس إشارة $f(x) - y = \frac{4}{(x+1)^2}$) لدینا : (f(x) - y) لفرق (Δ) یقع فوق (Δ) یقع فوق (Δ) یقع فوق (Δ) یقع فوق (Δ) .

(C_i) حساب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_i) و (C_i) و (C_i) و (C_i) حسنة يمون C_i (C_i) و (C_i) حيث : C_i

$$A(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} [f(x) - y] dx = \int_{0}^{\alpha} \left(\frac{4}{(x+1)^{2}}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{4}{x+1}\right]_{0}^{\alpha} = \left(-\frac{4}{(\alpha+1)}\right) - \left(-\frac{4}{2}\right)$$
$$= -\frac{4}{\alpha+1} + 2 \quad (u.s)$$

السرين 17:

/ دالة عددية معرفة على (1:3 - / R كايل:

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

1) أحسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها ، ثم استنتج معادلات المستقيهات المقاربة لـ (C_f) .

- . f واستنتج اتجاه تغير الدالة f'(x)
 - 3) أنشئ جدول تغيرات 🖊 .
- 4) أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
 - 5) عين إحداثيات نقط تقاطع (Cf) منحنى الدالة f مع عاور الإحداثيات .
 - 6) أنشى (T) و (Cf) .
 - x عين المددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل α

: R - {- 1;3} نه

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} \frac{\alpha}{x+1} \frac{\beta}{x-3}$$

. $\beta;+\infty[$ على المجال f على المجال المجال أم

8) احسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات ذات المعادلات $x = \frac{7}{2}$ و x = 5

إشارة (٢) :

قيم ١.	- 00	-1	2	3		5	+ 00
$-2x^2 + 14x - 20$	-	-	0	+	+	0	
إشارة المقام	+ (+		+ 0	+		+
f'(x) إثبارة	_	-	9	+	+	0	-

: f تغيرات الدالة

- $x \in [2:3[\cup]3:5]$ لمتزايدة تماما لما $f \circ f$
- $x \in]-\infty;-1[U]-1;2]U[5;+\infty[$ المالما متناقصة تماما لما
 - : f الدالة f

نيم ٢		1 2	3	5	5 +∞
f'(x)	-	- 0	+	+) -
f(x)	0	1	+∞		$\frac{1}{4}$

4) معادلة الماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \int_{0}^{1} f(1) = -\frac{5}{4} : 2$$

$$y = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{5}{4} : 3$$
ومنه عادلة الماس $y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{4} : 3$
(5) إحداثيات نقط تقاطع $y = \frac{-1}{4}x + \frac{7}{4} : 3$

 $f(0) = \frac{7}{3} : (cf) \cap (yy')$

 $(Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{7}{3}\right) \right\} : equation (Cf) \cap (yy') = \left\{ \left(0;$

حل التبرين 17:

1) حساب النهايات:

$$D_{f} =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^{2}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^{2}} = 0$$

y=0 منه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -9 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^+ \end{pmatrix} \quad \forall y$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -9 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^- \end{pmatrix} \text{ if }$$

x=-1 ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -1 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^- \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty \quad \begin{pmatrix} 2x - 7 & \to -1 \\ x^2 - 2x - 3 \to 0^+ \end{pmatrix}$$
 کان

x=3 ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته

2) حساب المشتقة f: قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة f:

$$f'(x) = \frac{(2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(2x - 7)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 6 - 4x^2 + 18x - 14}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 14x - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$
equal to the equation of the equation $f'(x) = \frac{-2x^2 + 14x - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{5}{4(x+1)} + \frac{5}{4(x-3)}\right) dx$$

$$= \ln|x^2-2x-3| + \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln|x-3| + c$$

$$\therefore x \in \left[3; +\infty\right[\text{ dot } \right]$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$
 و $x + 1 > 0$ و $x - 3 > 0$
 $x \in]3; +\infty[$ و منه : من أجل كل $|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x - 3$
 $|x - 3| = x - 3$
 $|x + 1| = x + 1$

$$x \to \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x+1}{x-3}$$
: فالدالة f في المجال]3;+∞[دالة أصلية للدالة f

$$F(X) = \ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4} \ln \frac{x + 1}{x - 3}$$

$$S = \int_{0}^{5} f(x) dx = [F(x)]_{0}^{5} (us) \quad \text{(8)}$$

$$S = \int_{\frac{7}{2}}^{5} f(x)dx = [F(x)]_{\frac{7}{2}}^{5}(us) : (8)$$

$$S = \left[\ln(x^2 - 2x - 3) + \frac{5}{4}\ln\frac{x + 1}{x - 3}\right]_{\frac{7}{2}}^{5}(us) : ds$$

$$= \left(\ln 12 + \frac{5}{4}\ln 3 - \ln\frac{9}{4} - \frac{5}{4}\ln 9\right)(us)$$

$$= (4\ln 2 - \frac{9}{4}\ln 3) us$$

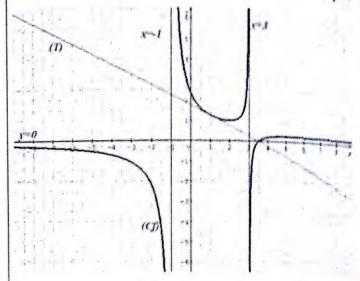
) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $R - \{-1\}$ كما يلي: و (C_g) عثيلها البياني فيالمستوي المنسوب $g(x) = \frac{x-1}{x-1}$ الى المعلم المتعامد و المتجانس (o;i;j).

$$f(x) = 0 : (Cf) \cap (\alpha \gamma)$$

$$x = \frac{7}{2} : \varphi \mid 2x - 7 = 0$$

$$(Cf) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{7}{2}; 0\right) \right\} : \varphi,$$

: (c) . w) (6



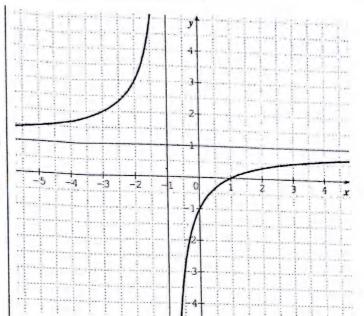
 $: x \in D_f$ نعيين α و β : سن أجل α

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$
$$= \frac{(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - 3\alpha - 2)}{x^2 - 2x - 3}$$
$$= \frac{2x - 2 + \alpha(x-3) + \beta(x+1)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(\alpha + \beta + 2 = 2; \beta - 3\alpha - 2 = -7)$$
 : بالمطابقة

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{4} \\ \beta = \frac{-5}{4} \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = 2 \\ \beta - 3\alpha - 2 = -7 \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta - 3\alpha = -5 \end{cases}; \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4\beta = -5 \end{cases};$$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{5}{4(x-3)}$$



- أ. شكل جدول تغيرات الدالة g.
- g(x) > 0 بيانيا المتراجحة
- 0 < g(x) < 1 ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها
 - $]1;+\infty[$ المعرفة على المجال [f] بـ:

و
$$(C_f)$$
 المنحنى الممثل لها $f(x)=rac{x-1}{x+1}+\ln\left(rac{x-1}{x+1}
ight)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1. أحسب f(x) و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين
 - هندسيا.
- $:]1;+\infty[$ انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال. 2

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

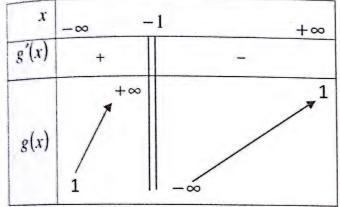
ب. أحسب f'(x) و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

- 3. أ. باستعمال الجزء 1) السؤال ج. عين إشارة العبارة
 - .]l;+∞[على المجال $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
 - pprox عدد حقيقي. بين أن الدالة lpha
 - $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$

 $[\alpha;+\infty[$ المجال a ثم عين دالة أصلية للدالة a على المجال a المجال a a ألمجال a

حل التمرين 18:

أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :



: g(x) > 0 بيانيا المتراجحة = 0

الحل البياني للمتراجحة g(x) > 0 هو:

 $x \in [-\infty; -1] \cup [1; +\infty]$

0 < g(x) < 1 ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها

 $x \in]1;+\infty[: U < g(x) < 1 البيان$

 $]1;+\infty[$ المعرفة على المجال f المعرفة على المجال التكن الدالة المعرفة على المجال المعرفة على المجال

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1) حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و تفسیر

النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left[\frac{x-1}{x+1} + \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] = -\infty$$

x = 1 مستقيم مقارب عمودي يوازي x = 1 مستقيم مقارب عمودي يوازي x = 1.

ا = ال منفي مفارب أفقي يوازي (xx').

ال إليات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال (2

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
: $[x+x]$

ثيانة ع قابلة للإشتفاق على المجال]∞+:[[ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب حساب مم و دراسة إشارتها:

المالة أرقابلة للإشتقاق على المجال}∞+: الرودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} \frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$
$$= \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

x-1>0 : نان x>1 نان الشنقة : بها أن 1< x نان : 0< 1-x

:
$$|1,+\infty|$$
 و عليه من اجل كل x من $\frac{4x}{(x+1)^2} > 0$

0 <(x) كرو بالتالي الدالة كر منزايدة تماما على المجال]∞+.ا[. جلول تغيرات الدالة كر :

$$0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$
 ! لدينا : $1 > 1$ ما سبق من أجل $1 < x > 1$ لدينا : 1

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$$
: و بالتالي $a \in [0,1]$ لل $\ln a < 0$ و بالتالي إشارة العبارة سالية.

ب. إثبات أن الدالة
$$x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$$
 هي دالة أصلية للدالة $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$ على المجال $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha)$: $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$ هي دالة أصلية وعليه الدالة $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$ على المجال $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$ بوضع $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$ على المجال $\alpha \mapsto \ln(x-\alpha) + x$

الدالة
$$k$$
 معرفة على المجال $\alpha;+\infty[$ و قابلة للإشتقاق عليه و :

$$k'(x) = \ln(x - \alpha) + (x - \alpha) \times \frac{1}{x - \alpha} - 1 = \ln(x - \alpha)$$

: $g(x) = 1 - \frac{2}{x + 1}$ التحقق أن

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$
 : لدينا

:]1;+ ∞ [المجال f على المجال أصلية للدالة f

: لدينا :
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
 وعليه

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

ما سق لدينا:

دالة أصلية للدالة
$$x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$$
 دالة $x \mapsto \ln(x-1)$

دالة أصلية للدالة
$$x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$$

$$x \mapsto \ln(x+1)$$

$$x \mapsto 1 - \frac{2}{x+1}$$
 دالة أصلية للدالة $x \mapsto x - 2\ln(x+1)$

و عليه :

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1)$$
$$-x - (x+1)\ln(x+1) + x$$

19 التعريل 19:

f'(x) = e' - ex - 1 نمتبر الدالة المددية f'(x)

البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد (C_j) عُثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O;i;j) .

 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)$

ب) أحسب (x) / ثم أدرس إشارتها،

ج) شكل جدول تغيرات الدالة 🛾 .

y = -cx - 1 ين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلته المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (Δ) بجوار (Δ).

ب)أكتب معادلة للمستقيم (T) عماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

]1,75;1,76 تقبل في المجادلة f(x) = 0 تقبل في المجال α علا وحيدا α

د) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال $-\infty$;2]

(3) أ) أحسب بدلالة α المساحة $\Lambda(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\alpha$ و x=0.

$$\Lambda(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua : (ua) + (ua)$$
 (ب) اثبت ان ua اثبت ان ua اثبت ان ua اثبت ان ua اثبت ان ua

حل التمرين 19:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ $f(x) = e^x - ex - 1$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^{x} - ex - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (e^{x} - ex - 1)$$

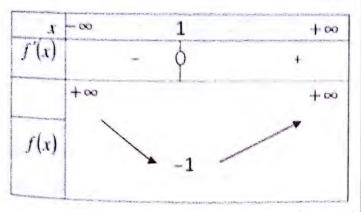
$$= \lim_{x \to \infty} x \left(\frac{e^{x}}{x} - e - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{x}}{x}\right) = +\infty = \lim_{x \to \infty} x = +\infty : 5Y$$

f'(x) > 0 و بالتالي : 1 = x . و عليه : 0 < (x) > 0لما 1 < x و بالتالي الدالة f'(x) متزايدة تماما و :

ا ا f'(x) < 0 لما f > 1 و بالتالي الدالة f'(x) < 0

ج) جدول تغيرات الدالة (



y=-ex-1 ذو المعادلة (Δ) أن المستقيم (Δ) أن المعادلة $(-\infty)$. مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ($(-\infty)$)

لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-ex - 1)] = \lim_{x \to -\infty} (e^x - ex - 1 + ex + 1)$$
= 0

y = -ex - 1 و منه المستقيم (Δ) الذي معادلته

المناوي المناوي $\Lambda(\alpha)$ المناوي المناوي المناوي المناوي المحدد بالمنحلي (٢٠) و حامل محور الفواصل والمستقيمين $(1 + \alpha) \cdot x = 0$ Spine $]0;\alpha] \cup f(x) - y < 0 : 51 =$ $A(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} [y - f(x)] dx = \int_{0}^{\alpha} (-e^{x} + ex + 1) dx$ $A(\alpha) = \left[-e^x + \frac{e}{2}x^2 + x \right]_0^{\alpha}$ $A(\alpha) = \left[-e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha \right] - \left(-e^{0} + \frac{e}{2}(0)^2 + 0 \right)$ $= \left[-e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1 \right] ua$: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua$: ابات آن $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$: نان $f(\alpha)=0$ نا ان $e^{\alpha} = e\alpha + 1$: $A(\alpha) = \left(-e^{\alpha} + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right)u\alpha : \text{ also }$ $A(\alpha) = \left(-e\alpha - 1 + \frac{1}{2}e\alpha^2 + \alpha + 1\right)u\alpha$ $= \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)u\alpha$

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار ∞ .

ب) كتابة معادلة للمستقيم (T) نماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة (C_f)

النفطة والمادلة f'(0)=1-e و f(0)=0 الدينا: f'(0)(x-0)+f(0) و عليه : y=(1-e)x: الرائحة y=f'(0)(x-0)+f(0) ج) إثبات أن المعادلة σ(x)=0 تقبل في المجال ا1.75:1,76 علا وحيدا α:

بهان الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1:+\infty]$ و المجال [1.75;1.76] عليه. و متزايدة تماما عليه.

و مرايده من جهة أخرى : 1.75e - 1= -0,0024 - 1.75e - 1= -0,0024 هن جهة أخرى : 1.76e - 1= -0,0024 و عليه 0> (1.76) × f (1.76) × صبب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد من المجال]1.75;1.76 يحقق :

 $f(x)\!=\!0$. $f(x)\!=\!0$ د) رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال

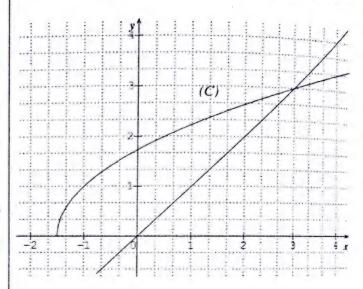
; -∞:2]

موافيي الوريا معالولي

الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

 $u_0=1$ معتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$: n ومن أجل كل عدد طبيعي n



. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\infty+;\frac{3}{2}$ كما يلي:

نه المستقيم (Δ) المستقيم البياني و (Δ) المستقيم μ (μ) المستقيم ذو المعادلة μ (μ) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (أنظر الشكل أعلاه).

 أ) أعدرسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u₃,u₂,u₁,u₀. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).

 (u_n) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

- : n برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $0 < u_n < 3$
 - (المتتالية ((u_n)) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية
- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب أن المتتالية (u_n)

التمرين 02:

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb C$ المعادلة ذات المجهول $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$
 - حل في C هذه المعادلة.
 - ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس Q ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس A , A
 - ، z نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها ${\mathfrak S}$

: حيث Z' النقطة M' النقطة ($z \neq 2-3i$)

النقط $z'=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$ النقط $z'=\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}$ النقط $z_{E}=3i$, $z_{D}=2-3i$, $z_{C}=-2i$ القطعة [CD].

أ- عبر عن المسافة ' OM بدلالة المسافتين CM و OM. - استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة ' M تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . (γ) تنتمي إلى (γ) .

التمرين 03:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:

، A(1;-2;5) والنقط 14x + 16y + 13z - 47 = 0. C(-1;3;1) ، B(2;2;-1)

- ا) تحقق أن النقط B,A و C ليست في استقامية.
 ب) يتن أن المستوي (ABC) هو (P).
 - جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).
- (Q) ا- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q)
 للقطعة [AB].
- ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ ج- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم D التمرين D والمستقيم D والمستقيم D والمستقيم D التمرين D التمرين D والمستقيم D والمستقيم D والمستقيم D التمرين D والمستقيم D التمرين D والمستقيم D والمستقيم

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0:\infty]$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C₇) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O;ī; j).

- التيجة هندسيا. $\lim_{x \to 0} f(x)$ مندسيا. $\lim_{x \to 0} f(x)$ ب- احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$
 - ر بین آنه من أجل كل عدد حقیقی x من [0]. $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة ٢، ثم شكّل جدول تغيراتها.

- بن ان المعادلة 0 = (x) / تقبل حلين α و β حيث
 الد > α > 3.5 < α < -3.4
 - انشئ المنحني (.) والمستقيم (۵).
 - $A\left(-1;3+oLn\left(\frac{3}{4}\right)\right) inclusion = 0$ $B\left(-2;\frac{5}{2}+oLn\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

بين أن $\frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{2} + x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ بين أن (AB)

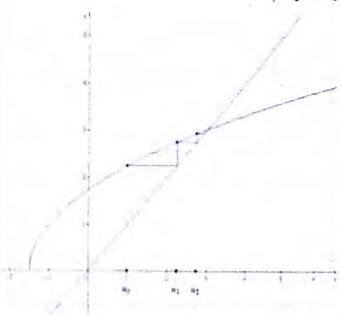
ب- بين أن المستقيم (AB) يعسى المنحنى (C_{r}) في نقطة M_{0} يطلب تعيين إحداثيتيها.

 $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$ $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$ بين أن و دالة أصلية للدالة f(x) = 0

حل الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

0 أ) الرسم:



ب) التخمين: (u_n) متتالية متزايدة ومتقاربة نحو العدد 3. θ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن u < 3.

 $p(n) < u_{\parallel} < 3$ الخاصية p(n) الخاصية

 $0 < u_0 < 3$ التحقق أن p(0) صحيحة: لدينا $u_0 = 1$ ومنه p(0) إذن p(0) صحيحة.

n نفرض أن p(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي p(n) أي $0 < u_n < 3$ ونبرهن أن $0 < u_n < 3$ كل عدد طبيعي n أي: $0 < u_{n+1} < 3$.

البرهان: لدينا: 3 $u_n < 0$ بالضرب في العدد 2 نجد $0 < u_n < 6$

وياضافة العدد 3 نجد 9 > 3 $\mu_n + 3 < 9$ ومنه $0 < 2u_n + 3 < 9$

اي : $3 < u_{n+1} < 0$ إذن: (n+1) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n < 3 .

 (u_n) أ) دراسة اتجاه تغيرات المتتالية

دراسة إشارة الفرق ($u_{n-1} - u_n$) : لدينا:

: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n$

 $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n \times \frac{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$

 $u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n + 3}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$ as g

 $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$

غلیل a+c=b فان حلا: $-u_n^2 + 2u_n + 3$ فان حلا

المعادلة (-1) و 3 وعليه: $-u_n^2 + 2u_n + 3 = 0$ و 3 وعليه:

 $-u_n^2 + 2u_n + 3 = -(u_n + 1)(u_n - 3)$

 $-u_n^2 + 2u_n + 3 = (u_n + 1)(3 - u_n)$: اي

و بالتالي: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(3 - u_n)}{\sqrt{2u_n + 3 + u_n}}$

الفرق $(u_{n-1}-u_n)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب. وبها أن $(u_n+1)>0$ فإن إشارة الفرق $(u_n+1)>0$ من

إشارة (ع-1).

من جهة اخرى لدينا 3 < , u و عليه 3−< , u و بالتالي

 $(3-u_n)>0$

 $.OB = \sqrt{6}$:ومنه

وعليه: OA = OB وبالتالي النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

أ- التعبير عن المسافة 'OM' بدلالة المسافتين CM وDM

لدينا
$$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$
 لدينا

$$|z'| = \frac{\left|3i\left(z+2i\right)\right|}{\left|z-2+3i\right|} : |z'| = \left|\frac{3i\left(z+2i\right)}{z-2+3i}\right|$$

$$|z'| = \frac{|3i||(z+2i)|}{|z-2+3i|}$$
 ومنه:

 $|z+2i| = |z-(-2i)| = |z-z_C| = CM$ لدينا: 3|z+2i| = |z-(-2i)|

$$|z-2+3i| = |z-(2-3i)| = DM$$

 $.OM' = 3.\frac{CM}{DM}$: أي

M'ب استنتاج أنه من أجل كل نقطة Mمن (Δ) فإن النقطة

تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

 (Δ) بيم أن (Δ) محور القطعة [CD] و M نقطة من

 $OM' = 3.\frac{CM}{DM}$: فإن CM = DM. فإن CM = DM.

و عليه: S = 'M' و بالتالي نستنتج أن النقطة M' تتمي

r=3 إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها

 (γ) النحقق أن E تنتمي إلى

OE = r و عليه $OE = |z_E| = |3i| = 3 \ OE$ و عليه $OE = |z_E| = |3i| = 3 \ OE$

 (γ) وبالتالي النقطة E تنتمي إلى

حل التمرين 03:

أ) التحقق أن النقط B,A و C ليست في استقامية:

 \overrightarrow{AC} (-2;5;-4) و \overrightarrow{AB} (1;4;-6) : لدينا

بها أن $\overrightarrow{AB} \neq \lambda \overrightarrow{AC}$ فإن الشعاعان \overrightarrow{AB} و غير

مرتبطان خطيا و بالتالي النقط B و C ليست في استقامبه

إذن $(u_n) > 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

 (u_n) استنتاج أن المتتالية متقاربة: بها أن (u_n) متتالية متزايدة

و محدودة من الأعلى بـ 3 فإن المتتالية (" س) متقاربة.

حساب النهاية u_n $\lim_{n \to \infty} u_n$: بها أن u_n متتالية متقاربة فإن نهايتها موجودة و منتهية و لتكن العدد ℓ .

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell \text{ فإن } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \text{ .}$$
 بوضع:

$$\ell = \sqrt{2\ell + 3}$$
: $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$

$$\begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell^2 - 2\ell + 3 = 0 \end{cases} : والتربيع نجد : \begin{cases} \ell \ge 0 \\ \ell^2 = 2\ell + 3 \end{cases} :$$

. $\lim_{n\to +\infty} u_n = 3$: و بحل المعادلة نجد $\begin{cases} \ell \geq 0 & : ext{...} \\ \ell = 3 \end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases} \ell \geq 0 & : \ell = -1 \end{cases}$

حل التمرين 02:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة ٢ المعادلة ذات المجهول

$$(z \neq 2-3i$$
 حيث $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$: التالية:

$$z(z-2+3i) = 3i(z+2i)$$
 تعنيأن: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

$$z^2 - 2z + 6 = 0$$
: أي $z^2 - 2z + 3iz = 3iz - 6$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = -20$$
 و بالتالي:

أي: $\Delta = (2\sqrt{5}i)^2$ و بالتالي المعادلة تقبل حلين هما:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}i}{2} = 1 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}i}{2} = 1 + \sqrt{5}i \end{cases}$$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها: لدينا:

$$|z_A| = |1 + i\sqrt{5}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$

 $.OA = \sqrt{6}$ ومنه:

$$|z_B| = |1 - i\sqrt{5}| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$
:

2x + 8y - 12z + 21 = 0; (Q)ب - التحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي $2x_D + 8y_D = 12z_D + 21 = 0$ لدينا: $2(-1)+8(-2)-12(\frac{1}{4})+21=0$ أي : 0=0+21=3+21=0 ومنه : 0=0 و بالتالي النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ (AB) ج-حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم المسافة بين النقطة Dوالمستقيم (AB) هي الطول ID وعليه: $d((\Delta);D) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + \left(0+2\right)^2 + \left(2-\frac{1}{4}\right)^2}$ $d((\Delta); D) = \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{100 + 64 + 49}{16}}$ $d\left((\Delta);D\right) = \frac{\sqrt{213}}{4}$ حل التمرين 04: أ- حساب f(x) أم التفسير النتيجة هندسيا: $\lim_{x \to 0} f(x)$ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left| x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x - 1}\right) \right| = -\infty$ $\left(\lim_{x\to\infty} \left| 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right| = -\infty$: ڏن

ومنه المستقيم الذي معادلته x=0 مستقيم مقارب عمودي. : lim f (x) ب- حساب $\left(\lim_{x\to\infty} (x+5) = -\infty\right) \cdot \left(\lim_{x\to\infty} \left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = 0\right)$: بها آن: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x - 1}\right) \right] = -\infty$:فإن: ،] $-\infty$, 0[من أجل كل عدد حقيقي x من 0 $:f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$

(P) هو (ABC) هو (P): 14(1)+16(-2)+13(5)-47=14-32+65-47=0: الدينا رعليه النقطة A تنتمي إلى المستوي (P). من جهة أخرى: 14(2)+16(2)+13(-1)-47=28+32-13-47=0(P) وعليه النقطة B تنتمي إلى المستوي كذلك: 14(-1)+16(3)+13(1)-47=-14+48+13-47=0وعليه النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) . ومنه المستوي (ABC) هو (ABC) (AB) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم نعتبر النقطة M(x;y;z) من المستقيم (AB) ومنه التمثيل $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ هو (AB) الوسيطي للمستقيم $x = \lambda + 1$ $\begin{cases} y = 4\lambda - 2 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. وعليه التمثيل الوسيطي هو $z = -6\lambda + 5$ Q أ- كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري Q:[AB] itali الستوي المحوري (Q) للقطعة [AB] شعاعه الناظمي هو والذي يشمل النقطة I منتصف القطعة \overline{AB} (1:4:-6) $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$: [AB] أي: $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. نعتبر النقطة $M\left(x;y;z\right)$ من المستوي المعوري(Q) وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري $\overrightarrow{IM} \overrightarrow{AB} = 0$ هي [AB] القطعة [Q] $1\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-0)-6(z-2)=0$

 $x - \frac{3}{2} + 4y - 6z + 12 = 0$

 $x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال]0;∞-[و دالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 6 \cdot \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} = 1 + 6 \cdot \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 6}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x - 1)}$$
:

استنتاج اتجاه تغیرات الدالة f و تشکیل جدول تغیراتها: إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل كل عدد حقیقي x

x(x-1) > 0]-∞;0[: من

x = -2 ومنه $x^2 - x - 6 = 0$

وهو مقبول أو x = 3 وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $[2-;\infty-[$ و f متناقصة تماما على المجال [2;0-].

جدول التغيرات:

y = x + 5 أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة x + 5 = 0 هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (۵) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (x+5) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (x+5) \right] = \lim_{x \to \infty} 6Ln \left(\frac{x}{x-1} \right) = Ln1 = 0$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة x = x + 5 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞ .

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

ب- دراسه الوطني المعابق بعد المعابق الفرق [f(x)-(x+5)]:

دراسة إشارة الفرق $f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$:

لدينا : $f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$ يكون من أجل كل عدد حقيقي x من المجال f(x)=00; f(x)=00

من أجل كل عدد حقيقي x من المجان $|0,\infty|$ يكون المجان |x| < 1 عدد لدينا |x| < 1 عدد |x| < 1 عدد الدينا |x| < 1 عدد المجان |x

 $Ln\frac{x}{x-1} < Ln1$ سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: f(x) - (x+5) < 0 يقع وبالتالي $C_f(x) - (x+5)$ من أجل كل $C_f(x) - (x+5)$ من أجل كل $C_f(x) - (x+5)$ من أجل كل $C_f(x) - (x+5)$

eta و α يثبات أن المعادلة α و α يقبل حلّين α و α و اثبات أن المعادلة α = -3.5 α = -3.4 حيث α = -3.4 و α

f(x)=0 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $\alpha < -3,5 < \alpha < -3,4$ تقبل حل $\alpha < -3,5 < \alpha < -3,4$

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال f

f فالدالة]-1,1;-1 [-2;0 و المجال]-2;0

 $f(-1,1)\approx 0.02$ مستمرة و رتيبة تماما عليه.و $f(-1)\approx -0.158$ و

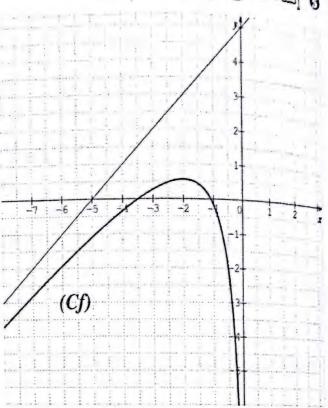
وبالتالي $f(1) < f(1) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القبم المتوسطة المعادلة f(x) = 0 تقبل حل β حيث:

 $-1, 1 < \beta < -1$

 β وعليه المعادلة α وعليه المعادلة α و f(x) = 0

حيث 3,4<-> م-1,1<β<-1 و 3,5<α<-3,4

 (C_r) والمستقيم (Δ) والمستقيم (Δ) :



 $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$ إثبات أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$ المستقيم (AB):

(AB) نعتبر النقطة M(x,y) نقطة من المستقيم

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
 لدينا . $\overline{AB} / / \overline{AM}$: ومنه

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-3-6Ln\frac{3}{4} \end{pmatrix} g$$

:يعني أن \overrightarrow{AB} يعني أن

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1) = 0$$

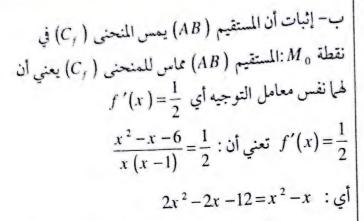
$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y - 3 - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} - 6Ln\frac{3}{4} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6Ln\frac{3}{4}$$



 $x^2-x-12=0$ وبالتالي: $x^2-x-12=0$ بحل المعادلة $x^2-x-12=0$ نجد x=-3 مقبول أو x=-3 هو مرفوض وبالتالي المستقيم x=-3 عند النقطة x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند النقطة x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند النقطة x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3 عند x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3 عند x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3 عند x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3 عند x=-3 عند x=-3 ماس للمنحنى x=-3 عند x=-3

و دالة معرفة على المجال $]0;\infty-[$ كما يلي: g

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6Ln(1-x)$$

: من أجل كل x من أجل كل x من أجل كل x من g

$$. g'(x) = f(x)] - \infty; 0[$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال]0;∞-[و:

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x \times \frac{-1}{(x-1)x} + 6\frac{-1}{1-x}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{(x-1)} + \frac{-6}{1-x}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{-6}{(x-1)} + \frac{6}{x-1}$$

$$g'(x) = x + 5 + 6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال g:-[.

الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول

. $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$: n غدد طبيعي

- n برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $\mathbf{0}$ برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $3 < u_n < 4$
 - ا بين أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$.u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3 + u_n - 3}}$$

استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

- ق برّر لماذا (u_n) متقاربة.
- . $v_n = In(u_n 3)$ بـ N بـ المتتالية المعرفة على (v_n)

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدّها الأول.

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة u_n ثم أحسب u_n .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي :

 $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) n$

. $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$ أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن

التمرين 02:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. C(1;-1;0) ، B(2;1;0) ، A(-1;0;1) نعتبر النقط

بين أن النقط B,A و C تعين مستويا.

بيّن أن 0=3z-y+5z-3=0 هي معادلة ديكارتية \bigcirc

للمستوي (ABC).

۵ و H نقطتان من الفضاء حيث:

 $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right) \int D(2; -1; 3)$

(ABC) إلى المستوي (ABC).

D النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة H على المستوي (ABC).

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعها.

التمرين 03:

(z) کثیر الحدود للمتغیر المرکب z حیث:

 $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود (P(z).

ب) جد العددين الحقيقيين lpha و eta بحيث من أجل كل

 $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)z$: عدد مرکب

P(z) = 0 المعادلة \mathbb{C} ، المعادلة P(z) = 0 .

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس C, B, A المستوي المركب لواحقها C, B, A المستوي المركب لواحقها

على الترتيب:

 $z_c = 3 - i\sqrt{3}, z_B = 3 + i\sqrt{3}, z_A = 6$

أ) أكتب كلا من على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

ج) استنج طبيعة المثلث ABC.

 $\sqrt{3}$ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\frac{\pi}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

S عبن Z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A' بالتشابه A', بين أن النقط A', A', في استقامية.

التمرين 04:

. $g(x) = 1 - xe^x$ كما يلي: R كما يلي الدالة المعرفة على R) لتكن

- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x)$
- ادرس اتجاه تغیّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغیراتها.
- وحيدا α على g(x) = 0 على المعادلة g(x) = 0 على المجال $[-1;+\infty]$.

 \mathbb{R} علی g(x) ب- تحقق أن g(x) ،ثم استنتج إشارة g(x) علی g(x)

ا) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[2;\infty-[$ كما يلي: .

المستوي المستوي عثيلها البياني في المستوي $(C_f)f(x)=(x-1)e^x-x-1$ المسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- $\lim_{x\to a} f(x) \longrightarrow 0$
- تكن f' مشتقة الدالة f، يتن أنه من أحل كل عدد حقيقي x من $[2,\infty-[$ فإن: (x)=-g(x). استنتج إشارة $(x)^2$ على المجال $[2,\infty-[$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.
- بيّن أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$. (تدور النتائج إلى $f(\alpha)$).
 - و أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة x = -x 1 هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (x = -x 1) بجوار x = -x 1 بالنسبة إلى (x = -x 1) بالنسبة إلى (x = -x 1) بالنسبة إلى (x = -x 1)
 - x_2 أ- بيّن أن المعادلة 0=0 تقبل حلّين x_1 و x_2 أ- بيّن أن المعادلة $x_1=0$ عيث $x_1=0$ أنشئ $x_2<1,6$ و $x_1<-1,6$ و $x_1<-1,6$ ب- أنشئ $x_1=0$ أنشئ $x_2<1,6$ و $x_1<-1,6$
 - : لتكن h الدالة المعرفة على R كها يلي h $h(x) = (ax + b)e^x$

أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $x\mapsto xe^x$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على R.

حل الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي $\begin{bmatrix} u_0 = \frac{13}{4} \\ u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3} \end{bmatrix}$

برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن $3 < u_n < 4$

نسمي p(n) هذه الخاصية ونتحقق أن p(n) صحيحة. لدينا: $\frac{13}{4} = u_0$ ومنه $2 < u_0 < 4$ إذن $2 < u_0 < 0$ صحيحة. $10 < u_0 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $10 < u_0 < 0$ أي $2 < u_0 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $10 < u_0 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $10 < u_0 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $10 < u_0 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $10 < u_0 < 0$ أي $10 < u_0 < 0$ البرهان: لدينا $10 < u_0 < 0$ بإضافة العدد $10 < u_0 < 0$ نجد $10 < u_0 < 0$

باستعمال الجذر التربيعي نجد $1 > 3 - n \sqrt{u_n - 3} > 0$ وبإضافة العدد $3 < u_{n+1} < 4$ وبالتالي $4 > u_{n+1} < 3 < 0$ إذن p(n+1) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ومنه حسب مبدأ

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n أي: 4 > 1 مراء على المراء الم

 (u_n) دراسة اتجاه تغیرات المتنالیة (u_n) : n إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3 + u_n - 3}}$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n : 1$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n : 1$$

 $u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n-3}+3-u_n \times \frac{\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)}{\sqrt{u_n-3}-(3-u_n)}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n - 3}\right)^2 - \left(3 - u_n\right)^2}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3 - \left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$
$$= \frac{u_n - 3 - u_n^2 + 6u_n - 9}{\sqrt{u_n - 3} - \left(3 - u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

 $: (u_{n+1} - u_n)$ دراسة إشارة الفرق

 $-u_n^2 + 7u_n - 12$ إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من إشارة الفرق $\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n) > 0$ لأن

نان $-u_n^2 + 7u_n - 12 = (4 - u_n)(u_n - 3)$ نان و بها آن

 $(4-u_n)$ من إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$ إشارة

 $u_n - 3 > 0$ گان

 $-u_n > -4$ من جهة أخرى لدينا 4 $u_n < 4$

وبالتالي 0<4+ س

 (u_n) وعليه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية

 $e^{v_{n}} = u_{n} - 3 \text{ i.i.d.} : n \text{ all } P_{n} \text{ a.i.d.}$ $e^{v_{1}} = u_{2} - 3 \text{ j.} e^{v_{1}} = u_{1} - 3 \text{ i.e.} e^{v_{0}} = u_{0} - 3 \text{ a.i.d.}$ $P_{n} = (u_{0} - 3)(u_{1} - 3)(u_{2} - 3) \times \dots \times (u_{n} - 3) : \text{ a.i.d.}$ $P_{n} = (e^{v_{0}})(e^{v_{1}})(e^{v_{2}}) \times \dots \times (e^{v_{n}})$ $P_{n} = e^{v_{0} + v_{1} + v_{2} + \dots + v_{n}} = e^{v_{0} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ $In^{\frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}} = e^{2in^{\frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$ $P_{n} = e^{2in^{\frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

حساب النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} \left(e^{2Ln \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} \right) \lim_{n \to +\infty} P_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \left(e^{2Ln \frac{1}{4} \times (1-0)} \right) = e^{2Ln \frac{1}{4}}$$

$$= \left(e^{Ln \frac{1}{4}} \right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

حل التمرين 02:

 $oldsymbol{0}$ ي إثبات أن النقط B , A و C تعين مستويا: $oldsymbol{0}$

لدينا \overline{AC} (2;-1;-1) لدينا \overline{AB} (3;1;-1) لدينا $\overline{AB} = k \overline{AC}$ نلاحظ أن $\overline{AB} = k \overline{AC}$ إذن لا توجد قيمة k بحيث يكون $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ وبالتالي النقط C,B,A تشكل مستوى.

2x - y + 5z - 3 = 0 إثبات أن (ABC):

2(-1)-(0)+5(1)-3=0=0 يعني $2x_A-y_A+5z_A-3=0$

(ABC) أي $A \in (ABC)$ أي $A \in (ABC)$

و استناج ان المتالية متقاربة: بها أن (u_n) متتالية متزايدة وعدودة من الأعلى بالعدد 4 فإن المتتالية (u_n) متقاربة. (v_n) متالية معرفة كها يلي من أجل كل عدد طبيعي $v_n = Ln(u_n - 3)$ متتالية معرفة كها يلي من أجل كل عدد طبيعي أي إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي $p \ge 2$ عقق: $p_n = Ln(u_n - 3)$ لدبنا: $p_n = Ln(u_n - 3)$ $p_n = Ln(u_n - 3)$ $p_n = Ln(u_n - 3)$ $p_n = Ln(u_n - 3)$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = Ln(u_0-3) = Ln\Big(\frac{13}{4}-3\Big) = Ln\Big(\frac{1}{4}\Big)$: ب كتابة كلاً من v_0 م بدلالة v_n

 $\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n Ln \frac{1}{4} : e^{v_n} = v_0 \times q^n : \\ e^{v_n} &= u_n - 3 \text{ easy } v_n = Ln(u_n - 3) : \\ u_n &= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln \frac{1}{4}} + 3 : \\ e^{u_n} &= e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln \frac{1}{4}} + 3 : \\ \lim_{n \to +\infty} u_n &= \lim_{n \to +\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln \frac{1}{4}} + 3\right) \end{aligned}$

 $\lim_{n\to+\infty}u_n:$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \left(e^{0Ln\frac{1}{4}} + 3 \right) = e^0 + 3 = 4$$

$$: e^0 + 3 = 4$$

$$: e^0 + 3 = 4$$

 $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times ... \times (u_n - 3) n$

أي أن H € (ABC) ومنه النقطة H تنتمي إلى المستوى .(ABC) $\overline{DH}\left(-\frac{17}{15}; -\frac{17}{30}; -\frac{17}{6}\right)$ [17] ومن جهة أخرى لدينا بها أن $\overline{n_{(ABC)}}$ و $\overline{DH} = -\frac{30}{17} \overline{n_{(ABC)}}$ موتبطان خطيا وبالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على . (ABC) الستوى ج- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان. ئم إيجاد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما: بما أن DH عمودي على المستوى (ABC) نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان. تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم تقاطعهما: مما سبق نستتج أن المستويين (ADH) و (ABC) يشتركان في نقطتين هما (ADH) و النقطة A ومنه المستويين Hو (ABC) متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم (AH). نعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH): نعتبر النقطة من المستقيم (AH) ومنه التمثيل الوسيط M(x;y;z) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}_1$ as (AH) $\overline{AM}(x+1;y;z-1)$ و $\overline{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$ لدينا $x+1=\frac{28}{15}t$ $(AH): \begin{cases} y = -\frac{13}{30}t \end{cases}$ و بالتالي: t∈R $|z-1| = -\frac{5}{6}t$ $\int x = \frac{28}{15}t - 1$ $(AH): \begin{cases} y = -\frac{13}{30}t \end{cases}$ وبالتالي: R €R

 $z = -\frac{5}{6}t + 1$

 $2x_R - y_R + 5z_R - 3 = 0$ $B \in (ABC)$ أي (2(2)-(1)+5(0)-3=0ومنه النقطة B تنتمي إلى المستوى (ABC). $2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 0$ $C \in (ABC)$ أي 2(1)-(-1)+5(0)-3=0ومنه النقطة C تنتمي إلى المستوى (ABC). 2x - y + 5z - 3 = 0 هو المستوي (ABC) هو المستوي $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ والنقطة $D\left(2; -1; 3\right)$ نعتبر Θ أ- إثبات أن النقطة (2;-1;3) V تنتمى إلى المستوي : $2x_D - y_D + 5z_D - 3 \neq 0 (ABC)$ $2(2)-(-1)+5(3)-3\neq 0$ لدينا: $0\neq 0$ $17 \neq 0$ أي: $D \notin (ABC) \neq D$ ومنه النقطة D لا تنتمي إلى المستوى $D \in (ABC)$. ب- إثبات أن النقطة $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة (2;-1;3 على المستوى: (ABC) هي المسقط العمودي $H \in (ABC)$ للنقطة D على المستوى $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{kn_{(ARC)}}$ نتحقق أن النقطة $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ تنتمي إلى المستوى $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 0$ (ABC) $2\left(\frac{13}{15}\right) - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) - 3 = \frac{26}{15} + \frac{13}{30} + \frac{5}{6} - 3$ $\frac{52+13+25-90}{30} = \frac{90-90}{30} = 0$: 176

أ) كتابة كلا من على الشكل الأسي: $z_{c} = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $z_B = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$ $z_A = 6 = 6e^0$

ب) كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري و الأسي: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6 - 3 - i\sqrt{3}}{6 - 3 + i\sqrt{3}}$

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} \times \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{9 - i6\sqrt{3} + \left(i\sqrt{3}\right)^2}{3^2 + \sqrt{2}^2}$

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{9 + 2\sqrt{3}i - 3}{9 + 3} = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12}$: لدينا

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6(1 - \sqrt{3}i)}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$: أي $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ وبالتالي:

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ الشكل الأسي للعدد

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$: لدينا

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

 $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ الدينا:

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

 $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ متبر کثیر الحدود 0 أ) النحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود P(z): $P(6) = 6^3 - 126^2 + 48 \times 6 - 72$: i.i. P(6) = 0

 $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$ $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$ الدينا: $P(z) = z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ بالطابقة مع

 $P(z) = (z-6)(z^2-6z+12)$ (عاليه: $\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 12 \end{cases}$

P(z) = 0 المعادلة C المعادلة الأعداد المركبة $(z-6)(z^2-6z+12)=0$ تعنى أن P(z)=0

 $\begin{cases} z - 6 = 0 \\ z^2 - 6z + 12 = 0 \end{cases}$

أولا: z = 6 ومنه z - 6 = 0.

ثانيا: $z^2 - 6z + 12 = 0$ ومنه نحسب الميز فنجد

 $\Delta = \left(2\sqrt{3}i\right)^2 \le \Delta = -12$

 $\begin{cases} \frac{BA}{CA} = 1 \\ (\overline{AC}; \overline{AB}) = -\frac{\pi}{3} + 2k \pi \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} z_1 = 3 - \sqrt{3}i \\ z_2 = 3 + \sqrt{3}i \end{cases}$ $\begin{cases} z_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} \\ z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي:

 $.S = \left\{6; 3 - \sqrt{3}i; 3 + \sqrt{3}i\right\}$

 $\sqrt{3}$ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\frac{\pi}{2}$.

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه 2:

$$z'-z_c = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_c)$$
 : العبارة المركبة للتشابه هي $z'-z_c = \sqrt{3}i(z-z_c)$ $z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}iz_c+z_c$ $z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}i(3-i\sqrt{3})+3-i\sqrt{3}$ $z'=\sqrt{3}iz-3\sqrt{3}i-3+3-i\sqrt{3}$ $z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i$

. $z' = \sqrt{3}iz - 4\sqrt{3}i$ ومنه العبارة المركبة للتشابه هي:

ب) تعيين z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه A' صورة النقطة A بالتشابه A' يعنى أن:

$$z_{A'} = \sqrt{3}iz_A - 4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'} = 6\sqrt{3}i - 4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'} = 2\sqrt{3}i$$

ج) إثبات أن النقط A', B, A في استقامية:

النقط A', B, A على استقامة واحدة يعني أن

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} \in R$$

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{6 - 3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i}$$
 لدينا:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i} = \frac{\left(3 - \sqrt{3}i\right)}{2\left(3 - \sqrt{3}i\right)} = \frac{1}{2} : \text{ (3)}$$

و بالتالي النقط A', B, A على استقامة واحدة.

حل التمرين 04:

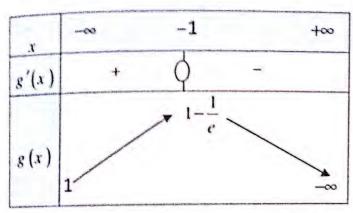
 $g(x) = 1 - xe^{x}$ كما يلي: R كما يلي و الدالة المعرفة على الدالة الدالة العرفة على الدالة ا

:
$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$
 $\lim_{x \to \infty} g(x)$ $\lim_{x \to \infty} g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - xe^x)$$

$$= -\infty \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 - xe^x) = 1$$

إشارة المشتقة من إشارة x - 1 - 1 لأنه من اجل كل عدد حقيقى: $e^x > 0$.



 α أ- إثبات أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا g(x) = 0 على المجال $[-1;+\infty]$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على $-\infty;1-\frac{1}{e}$ المجال g(x)=0 وتأخذ قيمها في المجال g(x)=0; المحال g(x)=0 و العدد صفر ينتمي إلى $-\infty;1-\frac{1}{e}$ إذن المعادلة $\alpha=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha=0$ على المجال $\alpha=0$: $\alpha=0$

x	00	α	+00
g(x)	+	7	-

! إشارة (g (x)

:
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$
 ساب $\mathbf{0}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-1)e^x - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (x-1)e^x = 0 : \forall y$$

 $]-\infty;2]$ من أجل كل عدد حقيقي x من أجل كل عدد 0

$$:f'(x) = -g(x)$$
 فإن

 $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$ حيث: $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$ حيث: $f'(x) = xe^x - 1 = -(-xe^x + 1)$ f'(x) = -g(x)

استنتاج إشارة f'(x) على المجال $f(x) = -\infty$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة g(x) وعليه:

ومنه f متناقصة تماما على المجال $[\alpha; \alpha]$. g متزايدة تماما على المجال g. g

х	-∞	α	2
f'(x)	-	þ	+
f(x)	+80		e ² -3
	,	$f(\alpha)$	/

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$
 إثبات أن $f(\alpha) = (\alpha - 1)e^{\alpha} - \alpha - 1$ لدينا

 $1-\alpha e^{\alpha}=0$: اي $g(\alpha)=0$ اي المينا

$$e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$
 :وبالتالي

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$$
 : ealips

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 - 1}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$$
 بالتعویض نجد:

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$$

استنتاج حصراً للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى $f(\alpha)$):

(1)..........
$$\frac{1}{0.6} < \alpha < \frac{1}{0.5}$$
 ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$ لدينا

$$0,25 < \alpha^2 < 0.36$$
 ومن جهة أخرى

$$1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36$$
 أي

$$-1,36 < -(\alpha^2 + 1) < -1,25$$
:

$$-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$$
:ومنه

$$.-2,72 < f(\alpha) < -2,08$$
 إذن:

$$y = -x - 1$$
 أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة \mathbf{O}

$$-\infty$$
 مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار

$$f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$$
 : لدينا

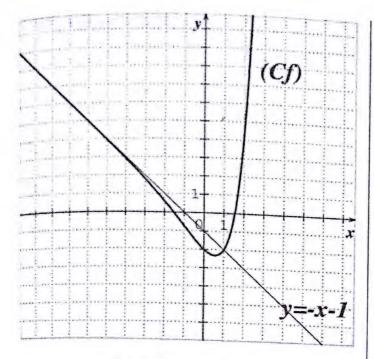
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \to \infty} (x - 1)e^x = 0$$
 : إذن:

ومنه
$$y = -x - 1(\Delta)$$
 هو مستقیم مقارب مائل

.
$$-\infty$$
 للمنحنى (C_f) بجوار

$$(\Delta)$$
 بالنسبة إلى (C_f) بالنسبة إلى

$$[f(x)-(-x-1)]$$
 دراسة إشارة الفرق



الدالة المعرفة على R كما يلى:

$$.h(x) = (ax + b)e^x$$

 $x\mapsto xe^x$ أ- h دالة معرفة على المجال R كما يلي hb و a تعيين العددين الحقيقيين

: على R يعنى أن $x\mapsto xe^x$ على الدالة أصلية للدالة

$$h'(x) = xe^x$$

$$h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x$$

$$h'(x) = (ax + a + b)e^x$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = (x - 1)e^x \qquad (h(x) = (x - 1)e^x)$$

$$\therefore R \qquad (h(x) = xe^x)$$

$$\therefore R \qquad (h(x) = xe^x)$$

$$\Rightarrow x \mapsto xe^x \qquad (h(x) = xe^x)$$

R للدالة g هي الدالة $x\mapsto x-(x-1)e^x+c$ على g

لدينا: $f(x) - (-x-1) = (x-1)e^{x}$ إشارة الفرق من إشارة (x −1) على المجال [1;∞-[يكون لدينا و بالتالي المنحنى (C_f) يقع f(x) - (-x-1) < 0تحت المستقيم (۵)وعلى المجال [2;ا[يكون لدينا (C_f) وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (△). M (1;-2) في النقطة (C_{r}) المنحنى (C_{r}) المنحنى x_2 و x_1 تقبل حلّين f(x) = 0 انبات أن المعادلة f(x) = 0 $= -1,5 < x_2 < 1,6$ و $= -1,6 < x_1 < -1,5$ f(-1,5) = -0.06 لدينا f(-1,6) = 0.08[-1,6;-1,5] المجال متناقصة تماما على المجال f $f(-1,5) \times f(-1,6) < 0$ إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا إذن المعادلة المتوسطة. $-1,6 < x_1 < -1,5$ f(1,5) = -0.26 و f(1,6) = 0.37 لدينا *

[1,5;1,6] المجال متناقصة تماما على المجال $f(1,5) \times f(1,6) < 0$ إذن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا يث

المتوسطة ومنه نستنتج $1.5 < x_x < 1.6$

 (C_r) أن المنحنى

يقطع محور الفواصل في نقطتين هما:

 $M_{2}(x_{2};0) \circ M_{1}(x_{1};0)$

 (C_f) و (Δ)

الموضوع 1 (دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

 $U_0=1$: يكن (u_n) المتنالية العددية المعرفة كما يلي: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} : n$ يمن أجل كل عدد طبيعي $n = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

: المتتالية العددية المعرفة كما يلي $v_n = u_n + 4 : n$ ن أجل كل عدد طبيعي $v_n = u_n + 4 : n$

ا) ين أن (٧n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها

n کتب کلا من (u_n) و (v_n) بدلالة (u_n)

. \mathbb{IN} غلى المتتالية (u_n) على (u_n)

4) أحب بدلالة المجموع Sn حيث:

 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

) لنكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي :

 $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

- ين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على N.

 $\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n):-$

لنسرين 02 :

لغضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس ($\overrightarrow{o,i}$, \overrightarrow{j} , \overrightarrow{k}). نعتبر النقط:

D(1;1;1) C(1;-1;2) B(-1;2;1) A(2;-1;1)

ا - تحقق أن النقط C، B، A تعين مستويا.

(ABC) مو شعاع ناظمي للمستوي $\overrightarrow{n}(1;1;1)$.

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

⁽²⁾ لتكنَّ النقطة مرجع الجملة المثقلة {(A;1);(B;2);(C;-1)} أ) أحسب إحداثيات G.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

التمرين 03 :

يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$$

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [GD].

 (Δ) بين أن المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

6x - 4y + 2z + 3 = 0: هي (Γ) هي أثبت أن معادلة (Γ) هي

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

لتكن النقط D، C، B ، A التي لاحقاتها على $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

$$z_D = \frac{z_C}{2}$$
 , $z_C = 6\sqrt{2}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$

أ - أكتب $z_{\rm A}$ و $z_{\rm A}$ و $z_{\rm A}$ الأسي.

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} - (-1)^{2014}$$

ج) بين أن النقط C. B. A. O تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

د) أحسب
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$
 ثم جد قيسا للزاوية ($\frac{\vec{C}A}{z_A}$

ما هي طبيعة الرباعي OACB؟

 $\frac{\pi}{2}$ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أكتب العبارة المركبة للدوران R.

R بالدوران C عين لاحقة النقطة C صورة النقطة ثم تحقق أن النقط C'AC في إستقامية.

ج) عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم R حدد صورة الرباعي OA'CB بالدوران

$$\vec{MA} + 2 \vec{MB} - \vec{MC} = 2 \vec{MD}$$

التمرين 114 :

نعتبر الدالة العددية ∕ المعرفة على المجال إ∞+ ; 0| كما يلي:

$$f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\overrightarrow{o,i},\overrightarrow{j})$.

ا) أ – أحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} f(x)$ فسر النتيجتين هنا سيا.

ب) أدرس اتجاه تغيرات الدالة /على المجال]∞+; 0[ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ – أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : y=1

 \cdot أكتب معادلة الماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة ا

ج) بين أن المعادلة $\alpha = f(\mathbf{r}) = 0$ تقبل في المجال $\alpha = 0$ علا وحيدا $\alpha < \alpha < e^{-0.3}$ حيث $\alpha < \alpha < e^{-0.3}$

 (C_f) انشی (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على {0} - R كما يلي : الحاما2

$$h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$$

وليكن (Ch) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ،

? ماذا تستنتج h(x) - h(-x) = 0

 (C_f) إعتبادا على المنحنى (C_h) إعتبادا على المنحنى

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

حل الموضوع 1 (دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01:

1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

: متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي (v_n)

 $v_{n+1} = v_n . q$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن q عدد حقيقي ثابت. حيث q عدد حقيقي ثابت.

n: الدينا من أجل كل عدد طبيعي

 $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3}$ $= \frac{2}{3}(u_n + 4) = \frac{2}{3}v_n$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول:

 $v_0 = u_0 + 4 = 5$

: n كتابة كلا من u_n و v_n بدلالة u

 $v_n = v_0$, $q^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$: n are denoted as $q^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

 $v_n = u_n + 4$: n من أجل كل عدد طبيعي

 $u_n = v_n - 4 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$:

: \mathbb{N} على اتجاه تغيرات (u_n) على (3

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} - u_n = -\frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3}$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4 - \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{16}{3} < 0$$

وعليه فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

 $S_{n} = u_{0} + u_{1} + \dots + u_{n}$ $= (v_{0} - 4) + (v_{1} - 4) + \dots + (v_{n} - 4)$ $= (v_{0} + v_{1} + \dots + v_{n}) + (-4 - 4 \dots - 4)$ $= v_{0} \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 4(n+1) = 5 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 4n - 4$ $= 15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - 4n - 4 = 11 - 4n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC): n . AM = 0 : فإن (ABC) من المستوي M(x;y;z) فإن G(x; y; z): $\overrightarrow{AM}(x-2; y+1; z-1)$ $x = \frac{1 \times (2) + 2 \times (-1) - 1 \times (1)}{1 + 2 - 1} = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{1 \times (-1) + 2 \times (2) - 1 \times (-1)}{1 + 2 - 1} = 2$ $z = \frac{1 \times (1) + 2 \times (1) - 1 \times (2)}{1 + 2 - 1} = \frac{1}{2}$ $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$: ومنه Γ ب - Γ) مجموعة النقط Γ من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$ [GD] هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [GD]: $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = 2|\overrightarrow{MD}|$ $|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GC}| = 2 |\overrightarrow{MD}|$ ومنه: $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$ مرجح الجملة المثقلة G $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = 0$: $\left\| \overrightarrow{MG} + 2 \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MG} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MD} \right\|$: ومنه $2 \overrightarrow{MG} = 2 |\overrightarrow{MD}|$ MG = MD : $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD}$: [GD] هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة 6x - 4y + 2z + 3 = 0: هي (Γ) هي أثبات أن معادلة (Γ) شعاع ناظمي للمستوي $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$.[GD] منتصف القطعة المستقيمة $\omega\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ و النقطة \overrightarrow{GD} . $\overrightarrow{\omega M} = 0$: لتكن النقطة M(x;y;z) من المستوي فإن

 $\vec{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$, $\vec{\omega M}\left(x-\frac{1}{4};y-\frac{3}{2};z-\frac{3}{4}\right)$

ى لنكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ ا- إثبات أن المتالية (wn) متزايدة تماما على IN: ال عدد طبيعي n: لدينا من أجل كل عدد طبيعي $w_{n+1} - w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1\right) - 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ $= \frac{5}{v_{-1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = 5 \left(\frac{1}{\frac{2}{3}v_n + 5} - \frac{1}{v_n + 5} \right)$ $=5\left(\frac{3}{2v_n+15}-\frac{1}{v_n+5}\right)=5\left(\frac{v_n}{(2v_n+15)(v_n+5)}\right)$ $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$: الدينا من أجل كل عدد طبيعي رمنه: $w_n > 0$ متزایدة تماما. $w_{n+1} - w_n > 0$ $: \lim_{n \to +\infty} (u_n - w_n) \leftarrow (\psi$ $\lim_{n \to +\infty} (u_n - w_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[v_n - 4 - 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) \right] = 0$ $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 : \mathring{y}$ D(1;1;1) ، C(1;-1;2) ، B(-1;2;1) ، A(2;-1;1): لدينا النقط : التحقق أن النقط C، B، A تعين مستويا التحقق أن النقط تعبن النقط C، B، A مستويا وحيدا إذا كان : \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطان خطيا. $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ لدينا ومنه \overrightarrow{AB} ومنه \overrightarrow{AB} عير مرتبطان خطيا. (ABC) با إثبات أن(1;1;1) هو شعاع ناظمي للمستوي $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1.(-3) + 1.(3) + 1.(0) = 0$

 $n \cdot \overrightarrow{AC} = 1.(-1) + 1.(0) + 1.(1) = 0$

با ان \overrightarrow{AB} ما ما م \overrightarrow{AC} ما فإن \overrightarrow{n} (1;1;1) هو شعاع ناظمي

للمستوي (ABC)

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \quad |1+i| = \sqrt{2} : \text{limit}$$

$$|(1+i)Z_A| = 6\sqrt{2} : \text{exp}$$

$$\arg[(1+i)Z_A] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad 9$$

$$(1+i)Z_A = 6\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} : \text{exp}$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} : \text{exp}$$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(\frac{6\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014} = e^{i\frac{\pi}{2}.2014} = e^{i.1007\pi}$$
$$= \cos(1007\pi) + i.\sin(1007\pi)$$
$$= \cos\pi + i.\sin\pi = -1$$

ج -إثبات أن النقط C ، A ، O تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

$$OD = |Z_D - Z_O| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} \right| = 3\sqrt{2}$$

$$AD = |Z_D - Z_A| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}(1+i) \right| = 3\sqrt{2}$$

$$BD = |Z_D - Z_B| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}(1 - i) \right| = 3\sqrt{2}$$

$$CD = |Z_D - Z_C| = \left| \frac{6\sqrt{2}}{2} - 6\sqrt{2} \right| = 3\sqrt{2}$$

 $OD = AD = BD = CD = 3\sqrt{2}$ بيا أن:

فإن النقط C ، A ، B ، A ، ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$ ونصف قطرها D

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1 - i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1 + i) - 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2(1-i-2)}}{3\sqrt{2}(1+i-2)} = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$|\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{\omega M}| = 0$$

$$\frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{4} \right) - 1 \left(y - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(z - \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\frac{3}{2} x - y + \frac{1}{2} z + \frac{3}{4} = 0$$

$$3x - 4y + 2z + 3 = 0$$

(Δ) إثبات أن المستويين (ΔBC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسبطي له:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \dots \times (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z + 3 = 0 \dots \times (-2) \\ -2x - 2y - 2z + 4 = 0 \dots \times (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y + 7 = 0 \\ x = 6y - 7 \end{cases}$$

$$x = 6t - 7 : x = 6t - 7 : x = 6t - 7 : x = 6t - 7 + 2 : x = -6t + 7 - t + 2 : x = -7t + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y + 2z + 3 = 0 \dots \times (-2) \\ x - 6y + 7 = 0 : x - (2) : x - 6y + 7 = 0 : x - (2) : x - ($$

التمرين 03:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:

$$z^2 - 6\sqrt{2} z + 36 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-3\sqrt{2})^2 - 1 \times 36 = -18 = (3\sqrt{2}.i)^2$$

$$z_1 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}.i$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_3 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_4 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_5 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_6 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_7 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$z_8 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}.i$$

$$Z_A = 3\sqrt{2}(1+i) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_A = 6.e^{i.\frac{\pi}{4}}$$
: eais

$$Z_B = \overline{Z_A} = 6.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{bmatrix} \ln x \to -\infty \\ x \to 0^+ \end{bmatrix} :$$
 $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

x حراسة اتجاه تغيرات الدالة f من أجل كل من:]∞+; 10

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot (2 \ln x)}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

إشارة من إشارة البسط لأن المقام موجب تمام.

$$1 - \ln x > 0$$
 و $1 - \ln x = 0$

 $\ln x < 1 \qquad \qquad \ln x = 1$

x < e

x = e

قیم x	0	e	+∞
إشارة f'(x)	-	+	-

ومنه fمتزايدة تماما على المجال [0,e] متناقصة تماما على [e; +∞[الجال

f غيرات الدالة f:

X قيم	0		e		+∞
إشارة f'(x)		+	0	_	
			$\frac{2}{1+\frac{2}}{1+\frac{2}{1+\frac{1+\frac{2}{1+\frac{1+\frac{2}{1+\frac{1+1+1+\frac{2}}{1+1+\frac{1+\frac{1+\frac{1+1+1+1+\frac{1+1+\frac{1+1+1+1+$		
إشارة f(x)	0 -		е		1

2) أ - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي $f(x)-y=\frac{2\ln x}{x}:y=1$ معادلته

X قيم	0	e	+∞
إشارة 2lnx	+	0	-
إشارة x	+		+
إشارة y - إشارة	-	Q	+
وضعية (C_f) بالنسبة(Δ)	تحت	नंबर्	فوق

 $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}
ight)$ إيجاد قيسا للزاوية x = 0 ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $arg\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$

الناك ABC قائم في C وتساوي الساقين لأن

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} = |i| = 1$$

OD = AD = BD = CD if

[AB] والنقطة D منتصف [AB] والنقطة D منتصف

وعليه فإن الرباعي OACB مربع

يكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- كتابة العبارة المركبة للدوران R:

Z' = aZ + b: العبارة المركبة للدوران R تكتب على الشكل

$$a=i$$
: ومنه $\operatorname{arg}(a)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $|a|=1$

b = 0 ومنه $Z_0 = a Z_0 + b$: ومنه $Z_0 = 0$

Z' = i.Z: R ومنه العبارة المركبة للدوران

R الدوران C صورة النقطة C بالدوران C

$$Z_{C'} = i.Z_C = 6\sqrt{2}.i$$

النحقق أن النقط C'. A . C في إستقامية.

$$\overrightarrow{AC}(3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$$
: $\overrightarrow{AC}(6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}; 0 - 3\sqrt{2})$

$$\vec{AC'}\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$$
: ومنه $\vec{AC'}\left(0-3\sqrt{2};6\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$

أي: $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC}'$ وعليه النقط $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC}'$ في إستقامية.

R بالدوران A مورة النقطة A بالدوران R

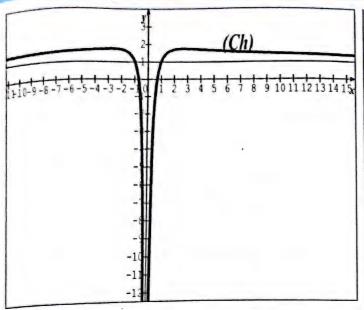
$$Z_{A'} = i.Z_A = i[3\sqrt{2}(1+i)] = 3\sqrt{2}(-1+i)$$

OA'C'A مورة الرباعي OACB بالدوران R هو الرباعي R(B) = Aو R(C) = C'و R(A) = A'و R(O) = O

$$D_f =]0; +\infty[\int f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}]$$

$$\left[\frac{\ln x}{x} \to 0\right] :$$
 الأن
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 - 1(1)$$

y=1 يقبل مستقيم مقارب معادلته (C_f)



ج - المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $|m|x^2 = (m-1)|x|$

 $\frac{\ln x^2}{|x|} = m-1$: ومنه $\ln x^2 = (m-1)|x|$: لدينا

h(x) = m: $\frac{2 \ln |x|}{|x|} + 1 = m$: $\frac{|x|}{|x|}$

وبالتالي فإن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيم الذي معادلته y=m

m قیم	- ∞	1	$1+\frac{2}{e}$	+∞
	حلين	حلين	ا <u>4</u> 4 حلول نځ	لا يوجد حلول

ب) معادلة الماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$f(1)=1$$

 $f'(1)=2$: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

y = 2x - 1:

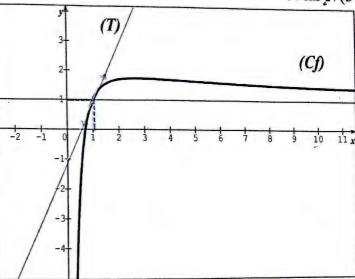
f الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال [1,0[

 $\lim_{x \to 0} f(x) \times f(1) < 0 \quad \text{o} \quad f(1) = 1 \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \text{o}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة f(x) = 0 تقبل في المجال [0,1] حلا وحيدا α وبها أن :

$$f(e^{-0.3}) \approx 0.2$$
 و $f(e^{-0.4}) \approx -0.2$ و $e^{-0.4}, e^{-0.3} \subset]0;1]$ $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$ فإن $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$:

3) الإنشاء:



$$D_h = R - \{0\}$$
 $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$ (4)

أ - إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : h(x) - h(-x) = 0

$$h(-x) - h(x) = 1 + \frac{2\ln|-x|}{|-x|} - 1 - \frac{2\ln|x|}{|x|}$$
$$= \frac{2\ln|x|}{|x|} - \frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

ومنه نستنتج أن h دالة زوجية.

 $h(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x} = f(x)$: فإن $x \in]0,+\infty[$ لل $x \in]0,+\infty[$ وعليه فإن (C_h) ينطبق على (C_f)

وبها أن h دالة زوجية فإن (C_h) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد $\mathbf{0}$

 $u_n = e^{\frac{1}{2}^{-n}}$: الطبيعية IN بحدها العام (الطبيعية e) اللوغاريتم النيبيري).

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها (u_n) الأولى.

احسب u_n ماذا تستنتج. (2

: أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث (3

 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

 $v_n = \ln u_n : n$ نضع من أجل كل عدد طبيعي \mathfrak{O}

(ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

ا) عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

: حيث P_n حيث العدد P_n حيث (2

 $P_n = \ln \left(u_0 \times u_1 \times ... \times u_n \right)$

 $P_n + 4n > 0$: ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث ب

التمرين02:

 $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (C(2;0;0) و B(1;-2;-3) ، A(1;-1;-2)

اً أ- برهن أن A و B و C ليست في استقامية.

ب - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

x + y - z - 2 = 0 هي معادلة ديكارتية x + y - z - 2 = 0 للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهم كما يلي:

(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0 (P): x - y - 2z + 5 = 0

برهن أن (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل

 $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t ; (t \in R) : z = t + 1 \end{cases}$

(Q) عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

d(M,(P)) لتكن M(x,y,z) نقطة من الفضاء. نسمي M(x,y,z) المسافة بين M و المستوي M(M,(Q)) المسافة بين M و المستوي M(M,(Q)).

عين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:

 $\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$

التمرين 03

z المعادلة ذات المجهول (1 حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول (z-i) $(z^2-2z+5)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (cm)، تعطى النقط $A \in B$ و التي (o,i,j)

لواحقها : $z_{\rm C} = 1 - 2i$ و $z_{\rm B} = 1 + 2i$ ، $z_{\rm A} = i$ على الترتيب.

A = 1أنشئ النقط $A \in B$ و

A المسقط العمودي للنقطة H المسقط العمودي للنقطة $Z_{\rm H}$ على المستقيم (BC).

ج - أحسب مساحة المثلث ABC.

 $\frac{\pi}{2}$ ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - عين الكتابة المركبة للتشابه S. $\frac{1}{2}cm^2$ بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$ بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

؛ عين مجموعة النقط M حيث M

|z| = |iz + 1 + 2i|

التمرين04:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

 $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

 $\lim_{x\to+\infty}g(x):\lim_{x\to-\infty}g(x)$

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة g على IR ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - بين أن المعادلة α = (x) ير تقبل حلا وحيدا α حيث : 0.7(α (0.8

ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة (x) ع.

و نعتبر الدالة العددية رالمعرفة على ١١٨ كما يل:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس ($(\vec{r},\vec{l}',\vec{l}')$

 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pmod{1}$

2) أ - بين أنه من أجل كل x من IR :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

 $(\Delta)^*$ ب استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيها مقاربا ماثلا $(\Delta)^*$ يطلب تعين معادلته.

 (Δ) و (C_f) و النسبي للمنحني (C_f) و

: AR من أجل كل x من
$$(3 - 1)^2 - 1$$

$$f''(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

حيث كمشتقة الدالة ك.

ب -استتج إشارة f'(x) حسب قيم x ثم شكل جدول نغيران f(x) الدالة (x نأخذ x x y الدالة (x y y

f(x) = 0 لم حل في IR المعادلة f(1) حسب (4

(2) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) لتكن االدالة المعرفة على IR ىكما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (Ch) غيلها البياني في المعلم السابق.

 $h(x) = f(x) - 2 : \mathbb{R}$ من x من $f(x) = f(x) - 2 : \mathbb{R}$ من x من أبك من

على الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد \bullet

 $u_n = e^{2^{-n}}$: الطبيعية IN بحدها العام (الطبيعية e) مو أساس اللوغاريتم النيبيري).

ا) إثباتأن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

: متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي (u_n)

 $u_{n+1} = u_n \times q$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن q غيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - (n+1)} = e^{\frac{1}{2} - n - 1} = e^{\frac{1}{2} - n} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} u_n$$

 $q=rac{1}{e}=e^{-1}$: ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $u_0=e^{rac{1}{2}}=\sqrt{e}$: وحدها الأول

 $\lim_{n\to+\infty}u_n: -(2$

 $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2} - n} = 0$

نستنتج أن (un) متتالية متقارية نحو العدد 0.

: حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

 $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \sqrt{e} \frac{1 - (e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}}$ $= \sqrt{e} \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}$

ب) كتابة قشلا ومبطيا للمستوي (ABC): لتكنُّ النفطة (XXX من المستوى (ABC) فإنها تحقق: $\alpha \in R : AM = \alpha.AB + \beta.AC$ $x-1=\alpha.0+\beta.1$ $\begin{cases} y+1=\alpha.(-1)+\beta.1 \end{cases}$ ومته : $z + 2 = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot (2)$ $x = \beta + 1$ $\{y = -\alpha + \beta - 1\}$ $z = -\alpha + 2\beta - 2$ x + y - z - 2 = 0 ج – التحقق أن 0 = 2 - z - x هي معادلة ديكارثية للمستوى (ABC). 0 = 0 نعوض إحداثيات النقطة h في المعادلة نجد 0 = 0 : نعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة نجد نعوض إحداثيات النقطة C في المعادلة نجد: 0 = 0 ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : x + y - z - 2 = 02) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهم كما يلي: (Q): 3x + 2y - z + 10 = 0 (P): x - y - 2z + 5 = 0يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل $\frac{-n^2+1}{2}+4n>0$ y = -t; $(t \in R)$: $\frac{-n^2 + 8n + 1}{2} > 0$ (P) شعاع ناظمي للمستوى $n(1;-1;-2) - n^2 + 8n + 1 > 0$ (Q) شعاع ناظمي للمستوى n'(3;2;-1)لدينا $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ ومنه الشعاعان \overrightarrow{n} و \overrightarrow{n} غير مرتبطين خطيا ومنه المستويين $(P)_{e}(Q)$ يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) . x + y - z - 2 = 0 نعوض y = -1 في المعادلة 0 = 0 t - 3 - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0 (Δ) رمنه: (Q)

ومنه : (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) .

ا اجل کل عدد طبیعی ۱۳ م استا = سرا اجل کل عدد طبیعی ۱۳ م ۱۳ م ۱۳ م ومن المستلج نوع المسالية (٧٠) : المسالية (٧٠) : $v_n = \ln u_n = \ln \left(e^{\frac{1}{2} - n} \right) = \frac{1}{2} - n$ ا عدد طبيعي n: وليبا من اجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1 = v_n - 1$ $v_0 = \frac{1}{2}$ ومته: r = -1 وحدها الأول ومته: $(v_y)_{(v_y)}$ $: P_n$ stell n ily 1/2 -1/2 $P_n = \ln(u_0.u_1.u_2.....u_n)$ $= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ $= v_0 + v_1 + \dots + v_n$ $=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=\frac{(n+1)(1-n)}{2}$ $P_n + 4n > 0$: ب- نعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث $P_n + 4n > 0$ $\frac{(n+1)(1-n)}{2} + 4n > 0$

رمه [0;8] م و n عدد طبيعي. أي: {n ∈ {0;1;2;3;4;5;6;7;8}

النعرين 02 :

الغضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (\vec{J} , \vec{k}) الغضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (C(2;0;0)) و B(1;-2;-3), A(1;-1;-2) و C(2;0;0) و C(2;0;0) و C(3;0;0;-1;-1) و C(3;0;0;-1;-1) و C(3;0;0;-1;-1)

ولدينا: $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ ومنه الشعاعان $A\vec{C}$ و عبر مرتبطين معلماً و منه النقط A و B و استقامية .

(Q) و (P) ، (ABC) ، (ABC) و (Q)

$$(P)\cap(Q)=(\Delta)$$
 : نعلم أن

$$(ABC)$$
نعوض $y=-t$ في المعادلة الديكارتية للمستوي و $z=t+1$

$$t-3-t-t-1-2=0$$
:

؛ تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث :

$$\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$$

$$\sqrt{6} \cdot \frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{14} \cdot \frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$$

$$|x-y-2z+5| = |3x+2y-z+10|$$

$$(x-y-2z+5)^2 = (3x+2y-z+10)^2$$

$$(x-y-2z+5)^2 - (3x+2y-z+10)^2 = 0$$

$$[4x+y-3z+15].[-2x-3y-z-5] = 0$$

$$4x + y - 3z + 15 = 0$$

$$2x + 3y + z + 5 = 0$$
if

$$\left(P_{1}\right) \cup \left(P_{2}\right)$$
 : هي $\left(\Gamma\right)$ المجموعة المجموعة وعليه فإن

$$4x + y - 3z + 15 = 0$$
: مستو معادلته (P₁) مستو

$$2x + 3y + z + 5 = 0$$
: مستو معادلته (P_2) مستو

التمرين03:

z على المجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول (1

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$
:

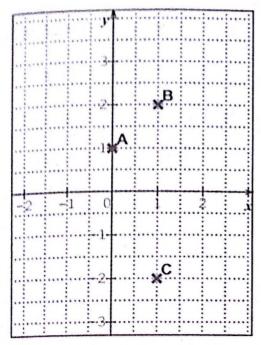
$$z=i$$
 : $z-i=0$:

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$
:

$$\Delta = -16 = (4i)^2$$

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$
 ومنه : $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ ومنه بحموعة حلول المعادلة 0 $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ ومنه بحموعة حلول المعادلة 0 $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (i,j) (وحدة الطول (i,j))، تعطى النقط (i,j) (وحدة الطول (i,j))، تعطى النقط (i,j) (i,j) المتمالة المراجقها (i,j) المراجة (i,j) المراجقة المراجقة المراجقة (i,j) المراجقة ا



A المسقط العمودي للنقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

x = 1: ومعادلة (BC) هي $H \in (BC)$

(BC) والمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H وعمودي على (Δ) معادلته هي : y=1 .

وعليه فإن النقطة H هي نقطة تقاطع (Δ) و (BC). أي H(1,1) ومنه H(1,1) ومنه

ج - حساب مساحة المثلث ABC.

$$S = \frac{AH.BC}{2}$$

$$AH = |Z_H - Z_A| = |1| = 1$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |-4i| = 4$$

 $S = 2cm^2$: e^2

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$. أ - تعيين الكتابة المركبة للتشابه S.

z' = Az + B: العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل

$$a = \frac{1}{2}i$$
 ومنه: $|a| = \frac{\pi}{2}$ ومنه: $|a| = \frac{1}{2}$

جدول تغيراتها:

)	Carlotte Contration of the Contration
-	
	10
	+

: عيد α اثبات أن المعادلة g(x)=0 تقبل حلا وحيدا α حيث α = 0.7 α (α (α).8

g مستمرة ومتزايدة على IR

$$g(0.8) \approx 0.06 \approx g(0.7) \approx -0.37$$

أي : 0 > $g(0.7) \times g(0.8) \times g(0.7)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث : 0.7 α

g(x) استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة

x	- ∞ a	+∞
g(x)	1- 10	+

و نعتبر الدالة العددية ∱ المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

 $\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad (1)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

: IR من x كل كل أ-إثبات أنه من أجل كل أ

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 1) + (1-3x)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$=\frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$=\frac{2x^3-4x+x+2}{2(2x^2-2x+1)}=\frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}=f(x)$$

Sب التشابه ABC بالتشابه $\frac{1}{2}cm^2$ بالتشابه $\frac{1}{2}cm^2$

S(C) = C' و S(B) = B' و S(H) = H' و S(A) = A الدينا : S(C) = C' و S(A) = A' و S(A) = A' و الدينا : S(C) = C' و S(A) = A' و S(A) = A' و الدينا : S(A) = A' و S(A) = A'

Lومنه مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S هي

$$L = \frac{AH'.B'C'}{2} = \frac{1}{2}cm^2 :$$

نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث M(4)

|z| = OM : is taken in

 $|iz + 1 + 2i| = |i(z - (-2 + i))| = |i||z - z_D| = DM$ OM = DM:

ومنه مجموعة النقط Mهي محور القطعة المستقيمة D(-2;1) حيث D(-2;1)

التمرين04 :

0 لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي:

$$g(x) = 2x^{3} - 4x^{2} + 7x - 4$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) : \lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$$

 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

وراسة اتجاه تغیر الدالة g علی $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$: $x \in R$ من أجل كل $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$: g'(x) من أجل كل $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$. α منز أجل كل α متز أبدة تماما على α

إشارة f'(x)من إشارة g(x) f'(x) لأن المقام دوما موجب

x	- 00	0		α	+∞
X	-	Ó			
g(x)	-		-	0	+
xg(x)	+	Ó		0	+

$$[lpha;+\infty[$$
 وعليه : f متزايدة على المجالين : $[0;lpha]$ متناقصة على المجال $[0;lpha]$

جدول التغيرات:

x	- 00	0		α	+∞
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		1 -			+00
	- 80			$f(\alpha)$	

$$f(x) = 0$$
 عساب (1) ثم حل في IR المعادلة (4) مساب (4) ثم حل أي $f(1) = 0$

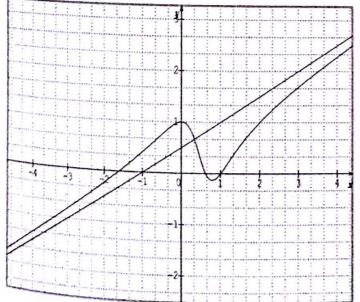
$$x^3 - 2x + 1 = 0$$
: $y = 0$

$$(x-1)(x^2+x-1)=0$$
:

$$x^2 + x + 1 = 0$$
 أو $x - 1 = 0$:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
 $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ of $x = 1$:

 (C_f) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).



ب - استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيا مقاربا مائلا (Δ) بطلب تعين معادلته.

يطلب عين معادلك.
لدينا :
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$
 : لدينا

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

المنحنى (
$$C_f$$
) يقبل مستقيها مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\phi + e^{\infty}$ معادلته : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$$(\Delta)$$
 و (C_f) و النسبي للمنحني (C_f) و

$$f(x) - y = \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

إشارة
$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$
 من إشارة $f(x)$ وعليه:

$$x \in \left] - \infty, \frac{1}{3} \right[\ \mathbb{L}(\Delta)$$
يقع فوق (C_f)

$$x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$$
 لل (Δ) يقع تحت (C_f)

$$A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$$
: في النفطة (C_f) يقطع تحت (C_f)

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

حث ' أمشتقة الدالة أ.

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2)-2x+1-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

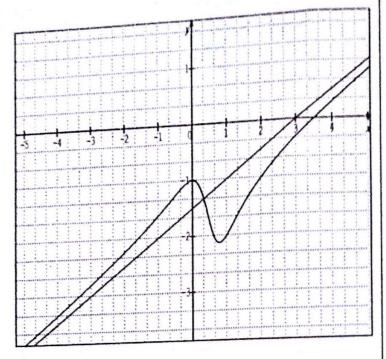
$$=\frac{2x^4-4x^3+7x_2-4x}{\left(2x_2-2x+1\right)^2}=\frac{x\left(2x^3-4x_2+7x-4\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

$$=\frac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

 $h(x) = f(x) - 2 \quad ;$

 $\overrightarrow{u}(0;-2)$ هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه (C_h)

 $:(C_h)$ انشاء



) لتكن الدالة المعرفة على IR ى كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

(Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

h(x) = f(x) - 2: IR من x عن أجل كل x من أجل كل التحقق أنه من أجل كل

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$

$$= \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

استنج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط - (C_h) لب تعيينه. ثم أنشئ